Calculul variaţiilor şi controlul sistemelor diferenţiale

Cătălin-George Lefter

Editura Alexandru Myller
Iaşi, 2006

EDITURA ALEXANDRU MYLLER
Iaşi, B-DUL CAROL I, nr.11,
tel. 0232-201061 / fax. 0232-201060
http://www.math.uaic.ro/∼sm/

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
LEFTER, CĂTĂLIN-GEORGE
Calculul variaţiilor şi controlul ecuaţiilor diferenţiale /
Cătălin-George Lefter. - Iaşi : Editura Alexandru Myller, 2006
Bibliogr.
Index.
ISBN (10) 973-86987-4-X ; ISBN (13) 978-973-86987-4-X
517.9

Referent ştiinţific
Prof. Univ. Dr. Gheorghe Aniculăesei
Facultatea de Matematică
Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" Iaşi

©Toate drepturile asupra acestei ediţii aparţin autorului şi Editurii Alexandru Myller

Lucrarea de faţă este o introducere în teoria clasică a calculului variaţiilor şi în ramura mai nouă a matematicii, continuare naturală a acesteia, teoria controlului ecuaţiilor diferenţiale. În cursul lucrării s-a urmărit definirea problematicii, descrierea metodelor matematice specifice şi a formalismului hamiltonian ce stă la baza celor două domenii, precum şi exemplificarea acestora în cazuri concrete.

Lucrarea se adresează în special studenţilor facultăţilor de matematică sau fizică, dar poate fi utilă oricui doreşte o introducere în acest domeniu. Fără a avea pretenţia unei monografii de a face o prezentare completă şi în maximă generalitate, lucrarea îşi propune să ofere o imagine clară a ideilor şi rezultatelor fundamentale.

Cuprins

Introducere 1

Partea 1. Calculul variaţiilor 9

Capitolul 1. Problema de calculul variaţiilor 11
1.1. Formularea problemei. Exemple 11
1.2. Ecuaţiile Euler-Lagrange 16
1.3. Condiţii necesare. Condiţii suficiente de extrem local slab 18
1.4. Teorema lui Noether 26

Capitolul 2. Formalismul canonic 29
2.1. Sisteme hamiltoniene 29
2.2. Variaţia totală a unei funcţionale 33
2.3. Ecuaţia Hamilton-Jacobi. Metoda lui Jacobi de integrare a sistemelor hamiltoniene 35

Partea 2. Controlul sistemelor diferenţiale 39

Capitolul 3. Controlul sistemelor liniare 41
3.1. Controlabilitatea sistemelor liniare 41
3.2. Control optimal. Principiul de maxim al lui Pontriaghin 46
3.3. Ecuaţia programării dinamice 48
3.4. Problema regulatorului liniar-pătratic 50
3.5. Stabilizarea sistemelor diferenţiale liniare 53
3.6. Problema de timp optimal pentru sisteme liniare 56

Capitolul 4. Reprezentarea ecuaţiilor diferenţiale pe varietăţi diferenţiabile 59
4.1. Ecuaţii diferenţiale pe varietăţi diferenţiabile 59
4.2. Reprezentarea exponenţială a fluxurilor 61

Capitolul 5. Controlabilitatea sistemelor diferenţiale 73
5.1. Teorema orbitei şi consecinţe 73
5.2. Sisteme analitice. Integrabilitate. Teorema lui Frobenius 76

Capitolul 6. Principiul de maxim al lui Pontriaghin 79
6.1. Mulţimi accesibile şi probleme de control optimal 79
6.2. Forma geometrică a principiului de maxim al lui Pontriaghin 81

6.3. Probleme de control optimal cu timp final liber 83
6.4. Principiul de maxim pentru problemele de control optimal 85
6.5. Legătura dintre principiul de maxim şi principiul programării dinamice 88
6.6. Probleme de control optimal - exemple 90

Index 99

Bibliografie 101

Introducere

Scopul acestei cărţi este de a prezenta, într-un volum restrâns, problematica şi ideile fundamentale din două ramuri ale matematicii: Calculul variaţiilor şi Teoria controlului. Teoria controlului, dezvoltată începând cu anii $'50$, reprezintă o continuare modernă a Calculului variaţiilor, faţă de care îşi diversifică mult problematica, însă cu care păstrează în comun un aspect deosebit de important care este structura hamiltoniană subiacentă.

Acest capitol introductiv face o trecere în revistă a principalelor noţiuni şi rezultate considerate în lucrare. Pentru început, menţionăm următoarea convenţie de notaţie: dacă M este o varietate diferenţiabilă şi $q : \mathbb{R} \to M$ este netedă, atunci $\dot{q} = \dfrac{d}{dt}q(t) \in T_{q(t)}M$, unde $T_{q(t)}M$ este spaţiul tangent la M în $q(t)$. În cazul în care varietatea diferenţiabilă $M = \mathbb{R}^n$, derivata unei funcţii netede $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ va fi notată cu $y' = \dfrac{d}{dt}y(t) \in \mathbb{R}^n$.

Calculul variaţiilor. Fie M o varietate diferenţiabilă $n-$dimensională, $M_0, M_1 \subset M$ subvarietăţi ale lui M, TM este fibratul tangent al lui M, $L : \mathbb{R} \times TM \to \mathbb{R}$ o funcţie pe care o numim *lagrangean*. Problema de calculul variaţiilor este de a găsi o curbă q^*, continuă şi de clasă C^1 pe porţiuni, care rezolvă problema de minim

$$\inf_{q \in \mathcal{C}} J(q), \quad J(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q(t), \dot{q}(t))dt, \tag{0.1}$$

$$\mathcal{C} = \{q : [t_0, t_1] \to M;\ q_i := q(t_i) \in M_i,\ q \in C([t_0, t_1]), C^1 \text{ pe porţiuni}\}.$$

Motivaţia studiului acestei probleme provine atât din mecanică cât şi din geometrie (v.§1.1, unde sunt prezentate câteva exemple, sau monografiile [**3**],[**11**],[**27**]).

Studiul condiţiilor de ordinul întâi în cazul problemei simple de calculul variaţiilor, când $M = \mathbb{R}^n$ şi q_0, q_1 sunt fixate, este făcut în §1.2. În acest caz spaţiul variaţiilor admisibile este $\mathcal{H} = \{h : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n;\ h(t_0) = h(t_1) = 0, h \in C^1\}$; dacă q^* este minim pentru J în $\mathcal{C}$, atunci prima variaţie a lui J în q^* este nulă:

$$\delta J(q^*)h := \frac{d}{ds}J(q^* + sh)|_{s=0} = 0. \tag{0.2}$$

O curbă q^* ce satisface (0.2) se numeşte *extremală*. Aceasta este numai o *condiţie necesară* pentru ca această curbă să realizeze infimul lui J . În

condiţii de regularitate pentru q^* aceasta se reduce la

$$L_q(t, q^*(t), (\dot{q}^*)(t)) - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}}(t, q^*(t), (\dot{q}^*)(t)) = 0, \tag{0.3}$$

care sunt *ecuaţiile Euler-Lagrange* ; acestea formează un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea (v.§1.2, §1.3). Extremala q^* moşteneşte regularitatea lui L dacă matricea $(L_{\dot{q}\dot{q}})$ este pozitiv definită. De altfel, *condiţia necesară a lui Legendre* ne spune că dacă q^* realizează infimul lui J, atunci $(L_{\dot{q}\dot{q}}) \geq 0$ de-a lungul lui q^*.

În §1.3 considerăm condiţii de ordinul al II-lea. Presupunem că matricea $(L_{\dot{q}\dot{q}})(t, q, \dot{q}) > 0$. Vom studia a doua variaţie a lui J:

$$\delta^2 J(q)h := \frac{d^2}{ds^2} J(q + sh)|_{s=0} = \int_{t_0}^{t_1} 2\Omega(t, h, \dot{h})dt,$$

unde $\Omega(t, h, \dot{h}) = \frac{1}{2}\left(L_{qq}(t, q^*, \dot{q}^*)h^2 + 2L_{q\dot{q}}(t, q^*, \dot{q}^*)h\dot{h} + L_{\dot{q}\dot{q}}(t, q^*, \dot{q}^*)\dot{h}^2\right)$. Condiţia necesară de ordinul al doilea pentru ca q^* să realizeze infimul este ca a doua variaţie să fie pozitivă: $\delta^2 J(q^*)\cdot \geq 0$. Vom ajunge astfel la noţiunea de punct conjugat. Acesta este un punct $\bar{t} \in (t_0, t_1]$ pentru care a doua ecuaţie a lui Euler (ecuaţia Euler-Lagrange asociată lagrangeanului $\Omega(t, h, \dot{h})$) are o soluţie nenulă cu $h(t_0) = h(\bar{t}) = 0$. Condiţia necesară a lui Jacobi ne spune că dacă q^* realizează infimul, atunci nu există în intervalul (t_0, t_1) puncte conjugate cu t_0 în raport cu extremala q^*. Condiţia suficientă de minim local slab este următoarea: dacă intervalul închis $[t_0, t_1]$ nu conţine puncte conjugate cu t_0, atunci extremala q^* este un minim local în raport cu topologia C^1. Tot în §1.3 vom extinde toate noţiunile introduse la cazul n-dimensional.

În §1.4 prezentăm teorema lui Noether, care ne dă un mod de construcţie a integralelor prime pentru ecuaţiile Euler-Lagrange atunci când lagrangeanul este invariant la un grup de difeomorfisme. Această teoremă este deosebit de utilă întrucât majoritatea legilor de conservare pentru sistemele mecanice se obţin drept consecinţe ale acestui rezultat (v.[**3**]).

Capitolul 2 studiază formalismul canonic hamiltonian. Ecuaţiile Euler-Lagrange se transformă dintr-un sistem de ordinul al doilea pe fibratul tangent TM într-un sistem de ordinul întâi pe fibratul cotangent T^*M, care are o structură naturală de varietate simplectică. Acesta este sistemul hamiltonian. Această transformare permite studiul şi integrarea unor sisteme din mecanică care nu admit alte abordări. De asemenea, punctul de vedere hamiltonian este util în studiul asimptotic care se face în teoria perturbaţiilor şi permite o înţelegere mai profundă a proprietăţilor calitative ale sistemelor mecanice complicate care apar, de exemplu, în mecanica cerească, mecanica statistică, mecanica cuantică etc. (v.[**3**],[**17**]).

Astfel, în §2.1 considerăm un lagrangean cu proprietatea că $(L_{\dot{q}\dot{q}}(t, q, \dot{q}))$ este matrice nedegenerată pentru orice $(t, q, \dot{q})$. Notăm cu

$$p = L_{\dot{q}}(t, q, \dot{q}). \tag{0.4}$$

Condiţia de nedegenerare ne asigură că formula (0.4) defineşte un difeomorfism local $(t, q, \dot{q}) \to (t, q, p)$ de la TM la T^*M. p se numeşte variabilă adjunctă, iar ansamblul variabilelor (q, p) formează variabilele canonice. Se introduce de asemenea hamiltonianul sistemului

$$H(t, q, p) = (p, \dot{q}) - L(t, q, \dot{q}). \tag{0.5}$$

Aceste transformări ne conduc la următorul sistem diferenţial de $2n$ ecuaţii de ordinul I:

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p}(t, q, p) \\ \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}(t, q, p) \end{cases} \tag{0.6}$$

Acestea sunt ecuaţiile lui Hamilton sau sistemul hamiltonian. Soluţiile acestui sistem sunt extremalele corespunzătoare lagrangeanului

$$\widetilde{L}(t, (q, p), (\dot{q}, \dot{p})) = (p, \dot{q}) - H(t, q, p)$$

pe T^*M. Proiecţiile pe M ale acestora sunt extremale pentru J. Considerăm de asemenea forma Lax a sistemelor hamiltoniene:

$$\frac{d}{dt}F(q, p) = \{H, F\}, \tag{0.7}$$

unde $\{H, F\} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial q} - \dfrac{\partial H}{\partial q} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial p}$ reprezintă paranteza Poisson a hamiltonienilor $F = F(q, p)$, $H = H(t, q, p)$. Considerarea celor două puncte de vedere pentru soluţiile sistemelor hamiltoniene, şi anume că acestea sunt, pe de o parte, extremale pentru lagrangeanul $\tilde{L}$, iar pe de altă parte că hamiltonienii $F(q, p)$ evoluează de-a lungul curbelor integrale conform ecuaţiei (0.7), ne conduce la introducerea noţiunii de transformare canonică (i.e. care păstrează structura simplectică şi deci forma sistemului hamiltonian) şi a noţiunii de funcţie generatoare pentru o transformare canonică.

În §2.2 calculăm variaţia totală a unei funcţionale de tipul (0.1), când capetele (t_i, q_i) sunt lăsate să se mişte liber pe subvarietăţi diferenţiabile din spaţiul (t, q). Obţinem pentru o extremală q^*, pe lângă ecuaţiile Euler-Lagrange, condiţiile de transversalitate

$$(p\delta q - H\delta t)|_{t=t_0}^{t=t_1} = 0.$$

În §2.3 se prezintă metoda lui Jacobi de integrare a sistemelor hamiltoniene. Astfel, funcţia valoare $S(t, q)$ care se defineşte într-o vecinătate a punctului (t_0, q_0) prin

$$S(t, q) = \int_{t_0}^{t} L(s, q^*(s), \dot{q}^*(s))ds,$$

unde q^* este unica extremală ce uneşte (t_0, q_0) cu (t, q), verifică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi numită ecuaţia Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t,q) + H(t,q,\frac{\partial S}{\partial q})(t,q) = 0. \tag{0.8}$$

De fapt, ecuaţiile lui Hamilton reprezintă ecuaţiile caracteristicilor pentru (0.8). Existenţa unei soluţii generale, depinzând de n parametri, pentru (0.8), conduce la integrarea sistemului hamilonian corespunzător. De altfel, în acest caz, soluţia S este o funcţie generatoare pentru o transformare canonică, iar în noile coordonate, obţinute prin această transformare, sistemul hamiltonian are o formă simplu de integrat. Aceasta este în esenţă metoda lui Jacobi.

Controlul sistemelor diferenţiale. Fie problema Cauchy pentru sistemul diferenţial

$$\begin{cases} y' = f(t,y,u) \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{0.9}$$

$y \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ reprezintă *starea sistemului*, $u \in U = \overline{U} \subset \mathbb{R}^m$ reprezintă *controlul* care aparţine *spaţiului controalelor* U. Ipotezele pe care le vom considera pentru f şi pentru strategiile (controalele) admisibile $u = u(t) \in \mathcal{U}$ ne vor asigura existenţa globală şi unicitatea soluţiei problemei Cauchy, soluţie notată cu $y^u(t)$. Mulţimea $\mathcal{U}$ de funcţii cu valori în U, pe care o vom preciza în situaţiile concrete studiate, se numeşte mulţimea controalelor admisibile. Aceasta va fi, după caz, $L^\infty(0,T;U)$, $L^2(0,T;U)$ sau mulţimea funţiilor măsurabile cu valori în U, constante pe porţiuni.

Problemele pe care le vom aborda sunt controlabilitatea, stabilizarea şi controlul optimal (v. [**37**] pentru o introducere în teoria controlului).

Controlabilitatea. Vom spune că sistemul (0.9) este *exact controlabil* în timp T dacă, pentru orice $y_0, y_1 \in \Omega$, există o stategie $u = u(t)$ astfel încât soluţia corespunzătoare a problemei Cauchy cu data iniţială y_0 să satisfacă $y^u(T) = y_1$. Sistemul este *nul controlabil* dacă pentru orice $y_0 \in \Omega$ există $u \in \mathcal{U}$ astfel încât $y^u(T) = 0$.

Vom spune că sistemul (0.9) este *aproximativ controlabil* în timp T dacă pentru orice $y_0, y_1 \in \Omega$ există un şir de controale admisibile $u_n \in \mathcal{U}$ astfel încât $y^{u_n}(T) \to y_1$.

Stabilizarea sistemelor diferenţiale. Fie $\bar{y}$ o stare staţionară a sistemului (0.9). Se pune problema determinării unui *control în formă feedback* $u = Ky$, astfel încât soluţia *sistemului cu buclă închisă* obţinut $y'(t) = f(t, y(t), Ky(t))$ să verifice $\lim_{t\to\infty} |y(t) - \bar{y}| = 0$.

Controlul optimal. În teoria controlului optimal se ataşează unui sistem de forma (0.9) o funcţională de cost $J(y,u)$ care are în general forma

$$J(y,u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), y'(t))dt + l(y(T)). \tag{0.10}$$

Un control $u \in \mathcal{U}$ se numeşte *admisibil* dacă $J(y^u, u) < +\infty$. Se caută controlul admisibil $u^*(t)$, numit *control optimal*, astfel încât

$$J(y^*, u^*) = \inf_{u \in \mathcal{U}} J(y^u, u). \tag{0.11}$$

Perechea (y^*, u^*) se numeşte pereche optimală (am notat $y^* = y^{u^*}$).

În capitolul 3 studiem problemele enunţate mai sus pentru sistemele liniare, în care

$$f(t, y, u) = A(t)y + B(t)u,\ t \in (0, T),$$

unde $t \to A(t) \in M_n(\mathbb{R}), t \to B(t) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ sunt funcţii continue, iar $U = \mathbb{R}^m$.

În §3.1 se studiază controlabilitatea acestor sisteme. Aceasta este echivalentă, în cazul sistemelor finit dimensionale pe care le studiem aici, cu controlabilitatea aproximativă şi cu inegalitatea de observabilitate

$$|p(0)|^2 \leq C \int_0^T |B^* p(t)|^2 dt$$

unde p este o soluţie arbitrară a ecuaţiei adjuncte $p' + A^* p = 0$. Aceasta este de asemenea echivalentă cu proprietatea de unică continuare $B^* p(t) \equiv 0, t \in [0, T] \Rightarrow p(t) \equiv 0, t \in [0, T]$. În cazul în care matricile A, B sunt constante, proprietatea de unică continuare enunţată este echivalentă cu faptul că rangul matricei lui Kalman $[A|B] := [B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ este n.

În §3.2 considerăm problema de control optimal şi discutăm condiţiile de optimalitate sau principiul de maxim al lui Pontriaghin (v.[**32**]). Astfel, pentru o funcţională de cost de tipul (0.10) se introduce hamiltonianul depinzând de u:

$$H^u(t, y, p) = (p, f(t, y, u)) - L(t, y, u).$$

De menţionat că prima ecuaţie, în y, a sistemului hamiltonian cu hamiltonianul H^u este exact (0.9). Pincipiul de maxim al lui Pontriaghin spune în esenţă că dacă u^* este control optimal, atunci există o soluţie (y^*, p^*) a sistemului hamiltonian cu hamiltonianul H^{u^*} şi condiţiile în capete $y(0) = y_0$, $p(T) = -\nabla l(y(T))$, iar

$$H^{u^*}(t, y^*, p^*) = \max_{u \in U} H^u(t, y^*, p^*). \tag{0.12}$$

Demonstraţia dată aici funcţionează în cazul problemei Bolza pentru sistemele liniare cu funcţională de cost pătratică. Notăm cu $H_{max}(t, y, p) = \max_{u \in U} H^u(t, y, p)$ hamiltonianul maximizat. Dacă acesta este regulat, atunci demonstrăm că (y^*, p^*) satisfac şi sistemul hamiltonian cu hamiltonianul H_{max}, iar controlul optimal u^* se exprimă cu ajutorul stării adjuncte p^* folosind proprietatea de maxim (0.12).

În §3.3 problema de control optimal este înglobată într-o familie de probleme de control optimal pentru care variem data iniţială (t_0, y_0). Funcţia valoare obţinută verifică o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi.

Această ecuaţie este ecuaţia programării dinamice, sau ecuaţia lui Bellman (sau Hamilton-Jacobi-Bellman) şi este de fapt ecuaţia Hamilton-Jacobi asociată hamiltonianului H_{max} (v.[**10**]). Rezolvarea unei probleme Cauchy pentru această ecuaţie permite obţinerea controlului optimal în formă feedback. În acest punct avem o imagine de ansamblu asupra trunchiului comun reprezentat de formalismul hamiltonian ce există atât în problemele de calculul variaţiilor, cât şi în problemele de control optimal.

Cele două metode fundamentale ale controlului optimal, principiul de maxim şi principiul programării dinamice, le aplicăm în §3.4 sistemelor liniare cu funcţională de cost pătratică de forma

$$J(y,u)=\frac{1}{2}\int_0^T (Q(t)y,y)+(R(t)u,u)dt+\frac{1}{2}(P_0y(T),y(T)).$$

Ecuaţia lui Bellman, pentru care căutăm o soluţie de forma $\frac{1}{2}(P(t)y,y)$, conduce în această situaţie la o ecuaţie diferenţială Riccati

$$P'+PA+A^*P-PBR^{-1}B^*P+Q=0,\quad P(T)=P_0,$$

care în condiţii de pozitivitate pentru Q,R,P_0, are soluţie unică iar controlul optimal se exprimă în formă feedback cu ajutorul lui P:

$$u^*(t)=-R^{-1}B^*P(t)y.$$

Paragraful §3.5 studiază stabilizarea cu control feedback liniar a sistemelor liniare. Rezultatul central este că controlabilitatea sistemului este echivalentă cu proprietatea de completă stabilizare a sistemului (i.e. pentru orice $\omega<0$ se poate alege feedbackul astfel încât sistemul liniar cu buclă închisă obţinut are toate valorile proprii cu partea reală mai mică decât ω, deci sistemul se poate stabiliza cu orice descreştere exponenţială). De asemenea, problema stabilizării este legată de o problemă de control optimal cu funcţională de cost pătratică cu orizont infinit. Aceasta conduce la ecuaţia Riccati algebrică:

$$SA+A^*S-SBR^{-1}B^*S+Q=0.$$

Soluţia minimală $\underline{S}$ a acestei ecuaţii, când există, ne furnizează un control feedback, $u^*(t)=-R^{-1}B^*\underline{S}y(t)$, ce stabilizează sistemul liniar.

În 3.6 analizăm problema de timp optimal pentru sistemele liniare. Rezultatul fundamental demonstrat aici, în anumite ipoteze, este o teoremă numită de bang-bang. Aceasta spune că, dacă mulţimea controalelor U este un poliedru, atunci timpul optimal se obţine cu un control ce este constant pe porţiuni, are un număr finit de puncte de comutare şi ia valori în vârfurile poliedrului U.

Următoarele trei capitole tratează aspecte geometrice ale problemelor de control. Astfel, în capitolul 4 sunt prezentate elemente de calculul operatorial introdus de A.Agrachev şi R.V.Gamkrelidze în [**1**],[**26**], care permite tratarea ecuaţiilor diferenţiale pe varietăţi diferenţiabile, din punct de vedere formal, ca pe ecuaţiile liniare. Acest calcul, numit şi reprezentare

exponenţială sau calcul cronologic, permite înlocuirea obiectelor neliniare (punctele varietăţii, vectorii tangenţi şi câmpurile vectoriale, difeomorfismele, fluxurile) cu obiecte liniare care sunt funcţionale liniare, operatori sau morfisme de algebre pe algebra funcţiilor infinit diferenţiabile pe varietatea considerată. Menţionăm formula variaţiei constantelor care capătă consistenţă şi în cazul neliniar folosind această reprezentare. Aceste tehnici ne permit în capitolul 6,§6.2,§6.3 să prezentăm demonstraţia principiului de maxim în formă geometrică dată în [**2**]. Acesta se aplică unei probleme de mulţimi accesibile la care se reduce o problemă de control optimal; această reducere este descrisă în §6.1. Tot în capitolul 6, §6.4 dăm principiul de maxim pentru diferitele tipuri de probleme de control optimal (Lagrange, Bolza, Mayer) şi pentru problemele cu timp liber. Analizăm în §6.5 legătura dintre principiul de maxim al lui Pontriaghin şi principiul programării dinamice, iar în §6.6 tratăm un număr de exemple concrete de probleme de control optimal.

Controlabilitatea sistemelor neliniare este tratată în capitolul 5, unde rezultatul principal este teorema orbitei sau teorema lui Nagano-Sussmann.

În încheierea acestui capitol trebuie de menţionat că lucrarea de faţă nu şi-a propus o prezentare completă a domeniului, multe direcţii importante de cercetare nefiind abordate. De aceea, încheiem cu o listă bibliografică care, departe de a fi exhaustivă, reflectă mai degrabă preferinţele autorului şi reprezintă din punctul de vedere al acestuia texte care pot fi de referinţă în ramurile corespunzătoare ale matematicii:

- Teoria ecuaţiilor diferenţiale - v. [**4**],[**16**],[**33**],[**35**].
- Geometrie - v. [**22**],[**23**],[**24**]
- Calculul variaţiilor - v. [**11**],[**27**].
- Mecanică teoretică, Fizică matematică - v. [**3**],[**17**],[**31**].
- Teoria clasică a controlului, principiul de maxim, principiul programării dinamicii - v. [**10**],[**28**],[**32**],[**37**].
- Teoria geometrică a controlului - v. [**2**],[**29**],[**30**].
- Teoria controlului stochastic - v. [**25**]
- Optimizare şi control optimal pentru ecuaţii diferenţiale finit şi infinit dimensionale - v. [**5**],[**6**],[**7**],[**8**],[**14**].
- Control optimal în ipoteze de regularitate minimală - v. [**12**], [**13**],[**15**].
- Soluţii de vâscozitate pentru ecuaţii Hamilton-Jacobi - v. [**18**],[**19**], [**20**],[**21**].

Partea 1

Calculul variaţiilor

CAPITOLUL 1

Problema de calculul variaţiilor

1.1. Formularea problemei. Exemple

Problema simplă de calculul variaţiilor constă în a determina curbele de clasă C^1 pe porţiuni, $q : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, ce satisfac condiţiile la capete $q(t_0) = q_0, q(t_1) = q_1$ şi care minimizează o funcţională de tipul

$$J(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q(t), \dot{q}(t))dt. \tag{1.1}$$

Am notat cu $\dot{q} = q' = \dfrac{d}{dt}q$. L se numeşte *lagrangeanul* problemei. Condiţiile asupra lagrangeanului L vor fi precizate ulterior.

Ne propunem să determinăm condiţii necesare de extrem şi condiţii suficiente pentru ca o curbă $q = q(t)$ să fie extrem local într-o anumită topologie. Metodele folosite pentru a obţine aceste condiţii au la bază metodele din analiza funcţiilor reale de varibilă reală, însă se identifică cu acestea numai într-o primă etapă, ulterior căpătând aspecte specifice.

Amintim în continuare câteva rezultate elementare privind caracterizarea punctelor de extrem pentru o funcţie de variabilă reală. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Condiţii necesare de extrem. Dacă f este diferenţiabilă de clasă C^2 şi $x^* \in [a, b]$ este punct de minim pentru f, atunci:

Dacă $x^* \in (a, b)$ atunci $f'(x^*) = 0, f''(x^*) \geq 0$.

Dacă $x^* = a$ (respectiv $x^* = b$) atunci $f'(x^*) \geq 0$ (respectiv $f'(x^*) \leq 0$).

Condiţii suficiente de extrem (local). Dacă f este diferenţiabilă, de clasă C^2, atunci

Dacă $x^* \in (a, b)$ şi $f'(x^*) = 0, f''(x^*) > 0$ atunci x^* este un punct de minim local strict.

Dacă $x^* = a$ (respectiv $x^* = b$) şi $f'(x^*) > 0$ (respectiv $f'(x^*) < 0$) atunci x^* este un punct de minim local strict.

Condiţii suficiente de extrem global. Dacă f este inferior semicontinuă şi mărginită inferior, atunci există $x^* \in [a, b]$ punct de minim pentru f.

Condiţii suficiente de unicitate a punctului de minim. Dacă f este strict convexă, atunci f are cel mult un punct de minim în intervalul $[a, b]$.

Fie acum un spaţiu normat X, $J : X \to \mathbb{R}$. Fie, de asemenea, $K \subset X$. Considerăm problema de minimizare

$$\inf_{x \in K} J(x)\,.$$

Dacă $u \in K$, atunci spunem că u este interior în direcţia v dacă $u + \varepsilon v \in K$ pentru $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. u se numeşte radial în direcţia v dacă $u + \varepsilon v \in K$ pentru $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$. Prima variaţie a lui J se defineşte prin

$$\delta J(u)v = \frac{d}{d\varepsilon} J(u + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0}.$$

A doua variaţie este dată de formula:

$$\delta^2 J(u)v = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(u + \varepsilon v)|_{\varepsilon=0}.$$

Prima şi a doua variaţie există în anumite ipoteze de regularitate pentru funcţionala J. De exemplu, acestea sunt bine definite pentru $J \in C^1(X)$, respectiv $J \in C^2(X)$, însă acestora li se poate da un sens pentru funcţionale cu regularitate mai mică, înlocuind derivata direcţională clasică cu diferite noţiuni de gradienţi generalizaţi (subdiferenţiala pentru funcţii convexe, gradienţi generalizaţi în sens Clarke pentru funcţii local lipschitziene etc. - v. [**34**],[**12**]).

Teorema 1.1.1. *i) Dacă J are punct de minim pe K, într-un punct x^* interior în direcţia v şi există prima şi a doua variaţie a lui J în x^*, atunci $\delta J(x^*)v = 0$ şi $\delta^2 J(x^*)v \geq 0$. Dacă punctul de minim x^* este numai radial în direcţia v atunci $\delta J(x^*)v \geq 0$.*
ii)Dacă mulţimea K este convexă, J este convexă pe K şi $\delta J(u)v \geq 0$ pentru orice v astfel încât x^* este radial în direcţia v, atunci x^* este punct de minim global.
iii) Dacă mulţimea K este convexă şi J este strict convexă pe K, atunci J are cel mult un punct de minim.
iv)Dacă X este spaţiu reflexiv, mulţimea K este convexă şi închisă iar J este convexă, inferior semicontinuă şi coercivă ($\lim_{\|u\| \to \infty, u \in K} J(u) = +\infty$), atunci J îsi atinge infimul pe K.

Înainte de a aplica rezultatele menţionate pentru funcţionalele de tipul (1.1), prezentăm câteva exemple care să motiveze studiul acestor probleme.

Exemplul 1.1.1. *Suprafaţa minimă de rotaţie.* Se pune problema determinării unei curbe $q : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}_+$, $q(t_0) = q_0$, $q(t_1) = q_1$ pentru care aria suprafeţei de rotaţie este minimă. Se ştie că aria suprafeţei de rotaţie este dată de formula

$$J(q) = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} q(t)\sqrt{1 + \dot{q}(t)^2}dt.$$

Aşadar, în acest caz, lagrangeanul este $L(t,q,\dot{q}) = 2\pi q\sqrt{1+\dot{q}^2}$ iar mulţimea de definiţie a funcţionalei este mulţimea curbelor continue şi de clasă C^1 pe porţiuni cu capetele fixate în q_0, q_1.

EXEMPLUL 1.1.2. *Problema brahistocronei.* Un punct material de masă m se mişcă fără frecare de-a lungul unei curbe aflate în plan vertical, ce uneşte punctele (x_0,y_0), (x_1,y_1). Se pune problema găsirii unei astfel de curbe pentru care timpul de parcurgere al acesteia să fie minim. Această curbă se numeşte *brahistocronă*.

Fără a restrânge generalitatea alegem reperul cartezian xOy astfel încât $x_0 = 0, y_0 = 0$ şi mişcarea are loc în sensul pozitival axei Oy. Notăm cu s lungimea arcului de curbă parcurs şi cu v modulul vitezei. Conservarea energiei ne spune că

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy.$$

Pe de altă parte,

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1+y'^2}\,\dot{x},$$

unde $y' = \dfrac{d}{dx}y$. Obţinem

$$dt = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx,$$

deci funcţionala pe care trebuie să o minimizăm este

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{2gy(x)}}dx.$$

Lagrangeanul pentru problema brahistocronei este $L(x,y,y') = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$ iar mulţimea de definiţie este mulţimea curbelor definite pe $[x_0,x_1]$, continue şi de clasă C^1 pe porţiuni, cu capetele fixate în y_0, y_1.

EXEMPLUL 1.1.3. *Mecanica lagrangeană* este ramura mecanicii ce studiază mişcarea unui sistem mecanic cu ajutorul spaţiului configuraţiilor. Spaţiul configuraţiilor are o structură de varietate diferenţiabilă pe care o notăm cu M. Coordonatele locale pe M sunt coordonate generalizate ale sistemului mecanic. Un sistem mecanic lagrangean este definit de o funcţie diferenţiabilă $L : \mathbb{R} \times TM \to \mathbb{R}$ numită *lagrangean*, unde TM este fibratul tangent al lui M. Traiectoriile sistemului mecanic, $q : [t_0,t_1] \to M$, sunt extremale (v. §1.2) pentru funcţionala

$$J(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,q(t),\dot{q}(t))dt.$$

Un caz particular al sistemelor lagrangeene sunt sistemele mecanice cu legături olonome pentru care lagrangeanul L are forma

$$L(t,q,\dot{q}) = T(\dot{q}) - U(t,q) \tag{1.2}$$

unde $\dot{q}$ se numesc viteze generalizate, T este energia cinetică a sistemului şi U reprezintă energia potenţială (v. [**3**]).

De exemplu, fie un sistem de n puncte materiale de mase $m_1, \ldots, m_n$, într-un câmp de forţe de potenţial $U = U(q)$ unde $q = (\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n)$ iar $\bar{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ sunt vectorii de poziţie ai punctelor materiale. q reprezintă coordonatele generalizate ale sistemului. Energia cinetică este

$$T(\dot{q}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i |\dot{\bar{r}}_i|^2$$

iar lagrangeanul este dat de (1.2)

Forţele care acţionează asupra sistemului sunt

$$F_i = -\frac{\partial}{\partial \bar{r}_i} U(q).$$

Legea lui Newton spune că ecuaţiile de mişcare ale sistemului sunt

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = F_i = -\frac{\partial}{\partial \bar{r}_i} U(q).$$

Vom vedea că acestea coincid cu condiţiile ca traiectoriile sistemului mecanic să fie extremale pentru J (*principiul minimei acţiuni* al lui Hamilton, v. [**3**]) şi care se exprimă prin ecuaţiile Euler-Lagrange (v. §1.2).

EXEMPLUL 1.1.4. *Mişcarea unui punct material într-un câmp de forţe central.* Fie $\bar{r}$ vectorul de poziţie al punctului material de masă m, $r = |\bar{r}|$, $U = U(r)$ potenţialul forţei centrale. Ecuaţia lui Newton este

$$m\ddot{\bar{r}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{r}} U(r) = F(r)\bar{r}.$$

Înmulţind ecuaţia vectorial cu cu $\bar{r}$, obţinem că $\dfrac{d}{dt}(\bar{r} \times \dot{\bar{r}}) = 0$, deci mişcarea este plană. În planul mişcării introducem coordonatele plare (r, θ) în care $|\dot{\bar{r}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$. Aşadar, lagrangeanul sistemului este

$$L((r, \theta), (\dot{r}, \dot{\theta})) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r).$$

EXEMPLUL 1.1.5. *Problema atracţiei de către două mase fixe egale.* Considerăm un punct material P, de masă 1, ce se mişcă în plan în câmpul gravitaţional al două puncte materiale fixe O_1, O_2, aflate la distaţă $2l$ unul de celălalt. Fie $d_i = \text{dist}\,(P, O_i), i = 1, 2$. Alegem $\xi_1 = r_1 + r_2, \xi_2 = r_1 - r_2$ drept coordonate generalizate ale punctului şi exprimăm lagrageanul în aceste coordonate. Aceste coordonate se mai numesc coordonate eliptice. Lagrangeanul este, după cum am văzut în exemplul 1.1.3, $L = T - U$ unde T este energia cinetică iar U este energia potenţială. Energia cinetică este

$$T = \frac{|\dot{\bar{r}}|^2}{2}$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziţie într-un reper cartezian. Energia potenţială este

$$U = -\frac{k}{r_1} - \frac{k}{r_2} = -\frac{4k\xi_1}{\xi_1^2 - \xi_2^2},$$

cu k o constantă pozitivă. Fie un sistem de axe în centrul O al segmentului $[O_1O_2]$, ce are dreapta O_1O_2 axa absciselor. Fie (r, θ) coordonate polare în acest sistem. Energia cinetică a punctului material are în aceste coordonate expresia

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Legătura între coordonatele polare şi coordonatele eliptice se obţine adunând egalităţile $r_1^2 = r^2 + l^2 + 2rl\cos\theta$, $r_2^2 = r^2 + l^2 - 2rl\cos\theta$:

$$\begin{cases} \xi_1^2 + \xi_2^2 = 4(r^2 + l^2) \\ \xi_1\xi_2 = 4rl\cos\theta. \end{cases}$$

Un calcul elementar, dar nu imediat, ne conduce la următoarea expresie a lagrangeanului

$$L(\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2) = \frac{\dot{\xi}_1^2}{8}\frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{\xi_1 - 4l^2} + \frac{\dot{\xi}_2^2}{8}\frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{4l^2 - \xi_2} + \frac{4k\xi_1}{\xi_1^2 - \xi_2^2}.$$

EXEMPLUL 1.1.6. *Geodezicele unei varietăţi riemanniene.* Se numeşte *varietate riemannianǎ* o varietate diferenţiabilă M pe care este definită, pentru fiecare spaţiu tangent $T_qM, q \in M$, o formă pătratică $(\cdot,\cdot)_q$ pozitiv definită, depinzând neted de q. Notăm cu $g(v) = (v, v)_q$ pentru $v \in T_qM$ şi numim *g metrica riemannianǎ* pe M. În coordonate locale $(q^1, \ldots, q^n)$ pe M, dacă $v = \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial q^i}$, metrica g are forma $g(v) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}v^iv^j$. Lungimea unei curbe netede $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ este dată de formula

$$J(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} g(\dot{\gamma}(t))dt.$$

Se pune problema determinării curbei de lungime minimă care uneşte punctele $q_0, q_1 \in M$. Lagrangeanul problemei, în coordonate locale, este

$$L(q, \dot{q}) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Curbele care sunt extremale pentru J (v. §1.2) se numesc *geodezice*.

1.2. Ecuaţiile Euler-Lagrange

Considerăm în cele ce urmează o funcţională de tipul (1.1). Presupunem că L este de clasă C^2 în ansamblul variabilelor. Mulţimea de definiţie a funcţionalei J este

$$\mathcal{C} = \left\{q : [t_0, t_1] \to \mathbb{R} | q \in C[t_0, t_1], C^1 \text{ pe porţiuni }, q(t_0) = q_0, q(t_1) = q_1\right\}.$$

Fie mulţimea variaţiilor admisibile

$$\mathcal{H} = \{h : [t_0, t_1] \to \mathbb{R} | h \in C[t_0, t_1], C^1 \text{ pe porţiuni }, h(t_0) = h(t_1) = 0\}.$$

Întrucât orice $x \in \mathcal{C}$ este interior în orice direcţie $h \in \mathcal{Y}$, putem calcula $\delta J(x)h$:

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(q + \varepsilon h) = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} L(t, q + \varepsilon h, \dot{q} + \varepsilon \dot{h}) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} L_q(t, q + \varepsilon h, \dot{q} + \varepsilon \dot{h}) h + L_{\dot{q}}(t, q + \varepsilon h, \dot{q} + \varepsilon \dot{h}) \dot{h} dt.$$

Am notat cu $L_q = \dfrac{\partial L}{\partial q}$, $L_{\dot{q}} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. Deci, făcând $\varepsilon = 0$, obţinem următoarea expresie pentru prima variaţie:

$$\delta J(q)h = \int_{t_0}^{t_1} L_q(t, q, \dot{q}) h + L_{\dot{q}}(t, q, \dot{q}) \dot{h} dt. \tag{1.3}$$

Dacă q^* realizează minimul, atunci $\delta J(q^*)h = 0, \forall h \in \mathcal{H}$.

O curbă q^* pentru care $\delta J(q^*) = 0$ se numeşte *extremală*. În cazul în care q^* este de clasă C^2 atunci, integrând prin părţi, obţinem:

$$0 = \delta J(q^*)h = \int_{t_0}^{t_1} [L_q(t, q^*, \dot{q}^*) - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}}(t, q^*, \dot{q}^*)] h dt$$

pentru orice $h \in \mathcal{H}$. Rezultă că

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{q}}(t, q^*, \dot{q}^*) - L_q(t, q^*, \dot{q}^*) = 0. \tag{1.4}$$

Aceasta este ecuaţia Euler-Lagrange care este o ecuaţie diferenţială, de ordinul al doilea. De altfel, aceasta este întotdeauna satisfăcută în sens distribuţional.

Aşadar, dacă q^* realizează infimul lui J şi este de clasă C^2, atunci q^* verifică (1.4). Nu orice extremală realizează infimul. Vom reveni asupra acestei chestiuni în §1.3.

Dacă q^* nu este decât de clasă C^1 pe porţiuni atunci, notând cu $p(t) = \int_{t_0}^{t} L_q(s, q^*(s), \dot{q}^*(s)) ds$ şi integrând prin părţi în (1.3), obţinem:

$$0 = \delta J(q^*)h = -\int_{t_0}^{t_1} [p(t) + L_{\dot{q}}(t, q^*(t), \dot{q}^*(t))] \dot{h} dt \tag{1.5}$$

pentru orice $h \in \mathcal{C}$. Deci, derivata în sens distribuţional a funcţiei $p + L_{\dot q}(t, q^*, \dot q^*)$ fiind nulă, are loc

$$p(t) - L_{\dot q}(t, q^*(t), \dot q^*(t)) = cst \quad \text{pe } [t_0, t_1]. \tag{1.6}$$

Rezultă că $L_{\dot q}(t, q^*, \dot q^*)$ este funcţie continuă deci, într-un punct $\bar t$ de salt al derivatei $\dot q^*$, are loc:

$$L_{\dot q}(\bar t, q^*(\bar t), \dot q^*(\bar t - 0)) = L_{\dot q}(\bar t, q^*(\bar t), \dot q^*(\bar t + 0)) \tag{1.7}$$

Aceasta este prima dintre *condiţiile de compatibilitate ale lui Weierstrass-Erdmann* asupra cărora vom reveni în §2.2.

Regularitatea soluţiilor pentru ecuaţia Euler-Lagrange.

TEOREMA 1.2.1. *Fie q^* extremală şi presupunem că $L_{\dot q\dot q}(t, q^*, \cdot) > 0$. Atunci, dacă $L \in C^r$ pentru un $r \geq 2$, rezultă că $q^* \in C^r$.*

Demonstraţie Ipoteza $L_{\dot q\dot q}(t, q^*, \cdot) > 0$ împreună cu condiţia Weierstrass-Erdmann (1.7) ne spune că în orice punct $\bar t \in (t_0, t_1)$ are loc $\dot q^*(\bar t - 0) = \dot q^*(\bar t + 0)$, deci q^* este de clasă C^1 şi $p \in C^1(t_0, t_1)$. De asemenea, condiţia $L_{\dot q\dot q}(t, q^*, \cdot) > 0$ ne permite să aplicăm teorema funcţiilor implicite în (1.6) privită ca ecuaţie în ultima variabilă $\dot q^*$. Cum $p(t)$ este de clasă C^1, rezultă că $\dot q^*$ este de clasă C^1 deci $q^* \in C^2$. Pentru $r > 2$ rezultatul se obţine prin inducţie. ∎

OBSERVAŢIA 1.2.1. *Un lagrangean pentru care $L_{\dot q\dot q}(t, q, \cdot) > 0$ se numeşte lagrangean regulat . Ecuaţia $Euler - Lagrange$ este în acest caz o ecuaţie diferenţială de ordinul II, nedegenerată. Această înseamnă, rezolvând o problemă Cauchy, că din punctul iniţial (t_0, q_0) pleacă pentru fiecare valorare a lui $\dot q(0) = \dot q_0$ câte o extremală unică.*

OBSERVAŢIA 1.2.2. *Pentru un lagrangean regulat ce nu depinde explicit de t, $L = L(q, \dot q)$, are loc pentru orice extremală q^*:*

$$L(q^*, \dot q^*) - \dot q^* L_{\dot q}(q^*, \dot q^*) = cst,$$

adică avem o integrală primă pentru ecuaţia Euler-Lagrange.
Într-adevăr, utilizând (1.4), avem că

$$\frac{d}{dt}(L(q^*, \dot q^*) - \dot q^* L_{\dot q}(q^*, \dot q^*)) = \dot q^*(L_q(q^*, \dot q^*) - \frac{d}{dt} L_{\dot q}(q^*, \dot q^*)) = 0.$$

Problema brahistocronei. Revenim la exemplul 1.1.2. Am văzut că lagrangeanul în problema brahistocronei este (facem abstracţie de constanta $1/\sqrt{2g}$): $L(y, y') = \dfrac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}$. Se verifică uşor că acesta este lagrangean regulat deci extremalele sunt netede în domeniul $y > 0$. Problema este deci de a găsi extremalele funcţionalei

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx.$$

Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $x_0 = 0$. Lagrangeanul L nu depinde explicit de x, deci avem o integrală primă: $-L + y'L_{y'} = cst$, de unde un simplu calcul ne dă $y(1 + y'^2) = cst$. Ţinând cont de direcţia de mişcare a punctului obţinem ecuaţia:

$$y' = \sqrt{\frac{C - y}{y}},$$

cu o constantă $C > 0$. Aceasta este o ecuaţie cu variabile separabile care, ţinând cont de faptul că $y(0) = 0$, are soluţia

$$x = \int_0^y \sqrt{\frac{z}{C - z}} dz.$$

Cu schimbarea de variabilă $z = C \sin \frac{\theta}{2}$ şi notând cu $r = C/2$, obţinem soluţia în formă parametrică

$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta) \end{cases} . \tag{1.8}$$

Aceasta este ecuaţia parametrică a unei *cicloide*, adică a curbei descrise de un punct de pe un cerc de rază r ce se rostogoleşte, fără să alunece, pe o dreaptă orizontală. θ este unghiul de rotaţie al cercului. Soluţia problemei este unicul arc neted de cicloidă, de ecuaţii (1.8), ce uneşte punctele $(0, 0), (x_1, y_1)$.

■

1.3. Condiţii necesare. Condiţii suficiente de extrem local slab

În cele ce urmează vom presupune că lagrangeanul L este regulat şi de clasă C^3. Fie q^* o extremală în problema simplă de calculul variaţiilor. Notăm cu

$$\Omega(t, h, \dot{h}) = \frac{1}{2}\left(L_{qq}(t, q^*, \dot{q}^*)h^2 + 2L_{q\dot{q}}(t, q^*, \dot{q}^*)h\dot{h} + L_{\dot{q}\dot{q}}(t, q^*, \dot{q}^*)\dot{h}^2\right). \tag{1.9}$$

Un calcul simplu ne arată că

$$\delta^2 J(q^*)h = \int_{t_0}^{t_1} 2\Omega(t, h, \dot{h})dt =: Q(q^*)h,$$

iar noul lagrangean Ω este de asemenea regulat.
Consecinţa imediată a teoremei 1.1.1,i) este:

PROPOZIŢIA 1.3.1. *Dacă q^* realizează infimul, atunci $Q(q^*)h \geq 0$ pentru orice $h \in \mathcal{H}$ adică forma pătratică Q este pozitivă pe $\mathcal{H}$.*

În cele ce urmează ne propunem să dăm o interpretare concretă a pozitivităţii celei de a doua variaţii. Vom vedea că aceasta este legată de comportarea familiilor de extremale ce pleacă dintr-un punct dat (t_0, q_0).

PROPOZIŢIA 1.3.2. *Fie $q(\cdot,s)$, $s \in (0,s_1)$, o familie de extremale astfel încât $q^* = q(\cdot,0)$, $q(t_0,s) = q_0 \,\forall s \in (0,s_1), \dfrac{\partial \dot{q}}{\partial s}(t_0,0) \neq 0$, $\dfrac{\partial q}{\partial s}(\bar{t},0) = 0$ pentru un $\bar{t} \in (t_0,t_1]$. Atunci, notând cu $h = \dfrac{\partial q}{\partial s}(\cdot,0)$, h este extremală pentru funcţionala $Q(q^*)(\cdot)$, adică verifică ecuaţia (numită şi a doua ecuaţie a lui Euler)*

$$\Omega_h - \frac{d}{dt}\Omega_{\dot{h}} = 0 \tag{1.10}$$

cu $h(t_0) = h(\bar{t})$,$h \not\equiv 0$.

Demonstraţie Întrucât $q(\cdot,s)$ sunt extremale pentru L, care este lagrangean regulat, acestea verifică ecuaţia Euler-Lagrange (1.4). Derivăm ecuaţia (1.4) în raport cu s pentru $s = 0$ şi obţinem (pentru simplitate omitem argumentul $(t, q^*(t), \dot{q}^*(t))$ al lui L):

$$0 = L_{qq}h + L_{q\dot{q}}\dot{h} - \frac{d}{dt}(L_{\dot{q}q}h + L_{\dot{q}\dot{q}}\dot{h}) = \Omega_h - \frac{d}{dt}\Omega_{\dot{h}}.$$

$h \not\equiv 0$ deoarece $\dot{h}(t_0) = \dfrac{\partial \dot{q}}{\partial s}(t_0,0) \neq 0$. Faptul că $h(t_0) = h(t_1) = 0$ rezultă imediat din ipoteză. ■

DEFINIŢIA 1.3.1. *Fie q^* extremală pentru L. Perechea $(\bar{t}, q^*(\bar{t}))$ cu $\bar{t} \in (t_0,t_1)$ se numeşte conjugată cu (t_0,q_0) de-a lungul extremalei (sau în raport cu extremala) q^* dacă există h extremală pentru a doua problemă a lui Euler (soluţie pentru (1.10)) astfel încât $h(t_0) = h(\bar{t}) = 0$, $h \not\equiv 0$. Vom mai spune şi că $\bar{t}$ este conjugat cu t_0 în raport cu q^*.*

OBSERVAŢIA 1.3.1. *Mulţimea punctelor conjugate de pe extremalele ce pleacă din (t_0,q_0), $q(\cdot,s)$, formează o curbă înfăşurătoare a acestor familii de extremale, dată parametric prin $s \to (t(s), q(t(s),s))$ unde $t = t(s)$ verifică ecuaţia $\dfrac{\partial}{\partial s}q(t,s) = 0$ (v. [**11**]).*

TEOREMA 1.3.1. (*Condiţia necesară a lui Jacobi*) *Dacă q^* este un minim pentru J pe intervalul $[t_0,t_1]$, atunci nu există puncte $(\bar{t}, q^*(\bar{t}))$, conjugate cu (t_0,q_0) în raport cu q^*, cu $\bar{t} \in (t_0,t_1)$.*

Demonstraţie Fie h extremală pentru $Q(q^*)(\cdot)$ în $\mathcal{H}$. Arătăm mai întâi că $Q(q^*)h = 0$. Cu Ω dat de (1.9) şi ţinând cont de (1.10) avem

$$2\Omega = h\Omega_h + \dot{h}\Omega_{\dot{h}} = h\frac{d}{dt}\Omega_{\dot{h}} + \dot{h}\Omega_{\dot{h}} = \frac{d}{dt}(h\Omega_{\dot{h}})$$

deci

$$Q(q^*)h = \int_{t_0}^{t_1} 2\Omega(t,h(t),\dot{h}(t))ds = h\Omega_{\dot{h}}|_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Întrucât q^* este minim pentru J, $\inf\limits_{h\in\mathcal{H}} Q(q^*)h = 0$. Presupunem acum că $\bar{t} \in (t_0,t_1)$ este conjugat cu t_0. Rezultă că există pe $[t_0,\bar{t}]$ extremala

$h \not\equiv 0$ pentru $Q(q^*)(\cdot)$, cu $h(t_0) = h(\bar{t}) = 0$. Din consideraţiile anterioare $\int_{t_0}^{\bar{t}} 2\Omega(t, h, \dot{h})dt = 0$ deci, dacă extindem pe h cu 0 pe intervalul $[\bar{t}, t_1]$, obţinem că $Q(q^*)h = 0$. Aşadar acest $h \not\equiv 0$ realizează infimul lui $Q(q^*)(\cdot)$. Cum Ω este lagrangean regulat rezultă că $h \in C^2$ şi satisface ecuaţiile (1.10). Cum $h = 0$ pe $(\bar{t}, t_1)$ rezultă că $h \equiv 0$ pe (t_0, t_1), contradicţie. ■

Fie acum forma pătratică pe $\mathcal{H}$:

$$Q(h) = \int_{t_0}^{t_1} P(t)\dot{h}^2 + R(t)h^2 dt \tag{1.11}$$

unde $P(t), R(t)$ sunt funcţii continue, $h \in \mathcal{H}$. Notăm cu

$$\Omega(t, h, \dot{h}) = P(t)\dot{h}^2 + R(t)h^2.$$

PROPOZIŢIA 1.3.3. *Dacă $Q(h) \geq 0$ pentru orice $h \in \mathcal{H}$, atunci $P(t) \geq 0, t \in (t_0, t_1)$.*

Demonstraţie Presupunem, prin reducere la absurd, că există $\bar{t} \in (t_0, t_1)$ cu $P(\bar{t}) < 0$. Fie

$$h_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}(\varepsilon - |t - \bar{t}|) & \text{pentru } |t - \bar{t}| < \varepsilon \\ 0 & \text{pentru } |t - \bar{t}| \geq \varepsilon \end{cases}$$

Se verifică uşor că $\lim_{\varepsilon \to 0} Q(h_\varepsilon) = -\infty$, ceea ce contrazice pozitivitatea lui Q. ■

COROLAR 1.3.1. (*Condiţia necesară a lui Legendre*) *Dacă q^* este minim pentru J, atunci $L_{\dot{q}\dot{q}}(t, q^*(t), \dot{q}^*(t)) \geq 0$.*

Demonstraţie Se aplică propoziţia 1.3.3 funcţionalei $Q(\cdot) = Q(q^*)(\cdot)$ care poate fi adusă la forma (1.11) printr-o integrare prin părţi. ■

Extindem acum noţiunea de *punct conjugat* în raport cu forme pătratice generale pentru care presupunem în cele ce urmează că $P(t) > 0, \forall t$.

DEFINIŢIA 1.3.2. *Punctul $\bar{t} \in (t_0, t_1)$ se numeşte conjugat cu t_0 dacă există o extremală $h \not\equiv 0$ pentru Q, pe $(t_0, \bar{t})$, cu $h(t_0) = h(\bar{t}) = 0$.*

Analogul teoremei 1.3.1, cu demonstraţie identică, are enunţul:

TEOREMA 1.3.2. *(Condiţia necesară a lui Jacobi) Presupunem că forma pătratică Q este pozitivă pe $\mathcal{H}$: $Q(h) \geq 0, h \in \mathcal{H}$. Atunci intervalul (t_0, t_1) nu conţine puncte conjugate cu t_0.*

TEOREMA 1.3.3. *Forma pătratică Q este strict pozitivă pe $\mathcal{H}$ (adică $Q(h) > 0, h \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$) dacă şi numai dacă intervalul închis $[t_0, t_1]$ nu conţine puncte conjugate cu t_0.*

Demonstraţie ($\Rightarrow$) : Am demonstrat că în intervalul (t_0, t_1) nu există puncte conjugate cu t_0. Presupunem ca t_1 ar fi punct conjugat cu t_0. Aceasta înseamna că există $h \in \mathcal{H}$, soluţie nenulă pentru (1.10) deci $Q(h) = 0$ ceea ce contrazice ipoteza $Q > 0$.

($\Leftarrow$) : Ideea este de a adăuga la integrandul lui Q o diferenţială exactă care să nu îi schimbe valoarea iar noul integrand să fie un pătrat perfect. Astfel, căutăm $w \in C^1(t_0, t_1)$ astfel încât

$$Q(h) = \int_{t_0}^{t_1} P(t)\dot{h}^2 + R(t)h^2 + \frac{d}{dt}(wh^2)dt$$

pentru $h \in \mathcal{H}$ (observăm că $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(wy^2)dt = 0$) şi integrandul $P\dot{h}^2 + Rh^2 + \frac{d}{dt}(wh^2) = P(t)\dot{h}^2 + (R(t) + w')h^2 + 2wh\dot{h}$ să fie un pătrat perfect. Acest lucru se întâmplă dacă:

$$P(R + w') = w^2 \tag{1.12}$$

şi, în acest caz,

$$Q(h) = \int_{t_0}^{t_1} P\left(\dot{h} + P^{-1}wh\right)^2 dt.$$

Se observă că, dacă această scriere este posibilă, atunci Q este strict pozitivă. Într-adevăr, dacă $Q(h) = 0$ atunci $\dot{h} + P^{-1}wh = 0$ pe (t_0, t_1), $h(t_0) = 0$ şi deci, în mod necesar, $h \equiv 0$.

Rămâne deci de găsit o soluţie a ecuaţiei Riccati (1.12) care nu se anulează pe intervalul închis $[t_0, t_1]$. Căutăm w de forma

$$w(t) = -\frac{\dot{u}(t)}{u(t)}P(t)$$

şi ecuaţia (1.12) devine

$$-\frac{d}{dt}(P\dot{u}) + Ru = 0. \tag{1.13}$$

Aceasta este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul al doilea în u şi se observă că este exact ecuaţia Euler-Lagrange ataşată funcţionalei Q. Din ipoteză, intervalul $(t_0, t_1]$ nu conţine puncte conjugate cu t_0 şi deci extremala h a lui Q ce satisface $h(t_0) = 0$, $\dot{h}(t_0) = 1$ nu se anulează pe intervalul $(t_0, t_1]$. Din propritatea de continuitate a soluţiei în raport cu datele iniţiale, extremala care verifică $u(t_0 - \delta) = 0$, $\dot{u}(t_0 - \delta) = 1$ cu $\delta > 0$ suficient de mic este definită pe intervalul $[t_0 - \delta, t_1]$ şi nu se anulează pe $[t_0, t_1]$. Demonstraţia este încheiată. ■

Condiţii suficiente de extrem local slab.

În continuare, înzestrăm mulţimea de definiţie a lui J, funcţiile $C^1(t_0, t_1)$ cu capetele fixate în q_0, q_1, cu topologia dată de norma

$$\|q\|_{C^1} = \sup_{t \in [t_0, t_1]} (|q(t)| + |\dot{q}(t)|).$$

Vom numi *extrem local slab* un extrem local în raport cu topologia dată de norma $\|\cdot\|_{C^1}$.

TEOREMA 1.3.4. *Presupunem că q^* este extremală pentru funcţionala (1.1) (deci este soluţie a ecuaţiei (1.4)) şi intervalul închis $[t_0, t_1]$ nu conţine puncte conjugate cu t_0 în raport cu extremala q^*. Atunci q^* este un minim local slab.*

Demonstraţie Fie $P(t) = L_{\dot{q}\dot{q}}(t, q^*(t), \dot{q}^*(t))$. Deoarece lagrangeanul este regulat, $P(t) > 0$ pe $[t_0, t_1]$ şi putem alege $\alpha > 0$ astfel încât $P(t) - \alpha > 0$. Din continuitatea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale în raport cu parametrii rezultă că forma pătratică $\tilde{Q}(h) = Q(q^*)h - \alpha^2 \int_{t_0}^{t_1} (\dot{h})^2 dt > 0$ pentru $y \neq 0$. Deci $Q(y) \geq \alpha \int_{t_0}^{t_1} (y')^2$. Rezultă că forma pătratică Q este pozitiv definită în raport cu topologia spaţiului Sobolev H^1 şi q^* este minim local în raport cu topologia H^1. Deci q^* este minim local şi în raport cu topologia C^1 care este mai tare. ■

Suprafaţa minimă de rotaţie. Pentru exemplul 1.1.1 lagrangeanul este $L(t, q, \dot{q}) = q\sqrt{1 + \dot{q}^2}$. Avem integrala primă $\dot{q}L_{\dot{q}} - L = \dfrac{q}{\sqrt{1 + \dot{q}^2}} = cst$, deci ecuaţia satisfăcută de extremale este

$$\dot{q} = \frac{1}{C}\sqrt{q^2 - C^2}.$$

Aceasta este o ecuaţie cu variabile separabile ce are soluţiile

$$q(t) = C\cosh(\frac{1}{C}t + s),$$

cu C, s constante. Acestea sunt catenarele. Fără restrânge generalitatea, presupunem $t_0 = 0$ şi găsim $C = \dfrac{1}{\cosh s}$. Notăm cu $q = q(t, s)$ extremalele respective. Mulţimea punctelor conjugate se află pe o curbă $q = e(t) = q(t, s(t))$, obţinută prin rezolvarea ecuaţiei $q_s(t, s) = 0$ (v. observaţia 1.3.1). Dacă $q_1 > e(t_1)$, există două extremale ce unesc $(0, q_0), (t_1, q_1)$ şi numai una dintre acestea nu conţine puncte conjugate cu $(0, q_0)$. Aceasta este un minim local slab şi de fapt realizează minimul lui J pe mulţimea curbelor ce satisfac $q(t) > e(t)$. Mai există o curbă $q = e_1(t) > e(t)$ astfel încât, dacă $q_1 \geq e_1(t_1)$, atunci catenara obţinută realizează infimul lui J. Dacă $q_1 < e_1(t_1)$ infimul lui J este aria suprafeţei de rotaţie degenerată formată din reuniunea discurilor de raze q_0, q_1, aflate în planele verticale $t = 0$, respectiv $t = t_1$. Pentru $q_1 = e_1(t_1)$ infimul se realizează pe catenară şi este egal cu aria suprafeţei de rotaţie degenerate (v.[**11**]). ■

Ecuaţii Euler-Lagrange in $\mathbb{R}^n$.

Fie $q = \begin{pmatrix} q^1 \\ \cdots \\ q^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ şi un lagrangean $L(t, q, \dot{q}) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Problema de calculul variaţiilor este aceeaşi, de a determina curbele $q : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^N$, care satisfac anumite condiţii la limită (de exemplu $q(t_0) = q_0$, $q(t_1) = q_1$) şi care minimizează funcţionala

$$J(q) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q})dt.$$

În cele ce urmează determinăm prima şi a doua variaţie a funcţionalei J şi reformulăm condiţiile necesare şi cele suficiente studiate în cazul scalar. Demonstraţiile vor fi făcute numai dacă acestea diferă substanţial de cazul scalar.

Lagrangeanul L îl considerăm de clasă C^3. Mulţimile de definiţie, respectiv mulţimea variaţiilor admisibile sunt $\mathcal{C}$, respectiv $\mathcal{H}$, unde am schimbat pe $\mathbb{R}$ cu $\mathbb{R}^n$. Prima variaţie a funcţionalei J este $\delta J(q)h = \dfrac{d}{dt} J(q+sh)|_{s=0}$:

$$\delta J(q)h = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial q} \cdot h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{h}dt = 0.$$

Aici " $\cdot$ " este produsul scalar din $\mathbb{R}^n$. Vom mai nota cu $L_q = \dfrac{\partial L}{\partial q}$, $L_{\dot{q}} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ gradienţii în raport cu q, respectiv $\dot{q}$. Integrând prin părţi (în ipoteza că regularitatea integranzilor o permite, de exemplu $q \in C^2$), obţinem că dacă q^* realizează infimul si este de clasa C^2, atunci satisface ecuaţiile Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t, q^*(t), \dot{q}^*(t))\right) - \frac{\partial L}{\partial q}(t, q^*(t), \dot{q}^*(t)) = 0. \tag{1.14}$$

Observaţia 1.3.2. *Ecuaţiile (1.14) formează un sistem diferenţial de ordinul al doilea, de n ecuaţii cu n necunoscute. Soluţiile acestui sistem se numesc extremale. Dacă matricea* $L_{\dot{q}\dot{q}} = (L_{\dot{q}^i\dot{q}^j})$ *este pozitiv definită pentru orice* $(t, q, \dot{q})$*, lagrangeanul se numeşte regulat. Pentru un lagrangean regulat de clasă* C^k*, toate extremalele sunt de clasă* C^k*. Demonstraţia acestui fapt este identică cu a teoremei 1.2.1 folosind în plus argumentul conform căruia gradientul unei funcţii strict convexe de clasă* C^1 *este o funcţie injectivă.*

Variaţia a doua a funcţionalei J este:

$$\delta^2 J(q)h = \frac{d^2}{ds^2} J(q + sh)|_{s=0} =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i,j=1}^{n} \left(L_{q^i q^j} h_i h_j + 2L_{q^i \dot{q}^j} h_i \dot{h}_j + L_{\dot{q}^i \dot{q}^j} \dot{h}_i \dot{h}_j \right) dt, \tag{1.15}$$

unde derivatele lagrangeanului L sunt evaluate în $(t, q(t), \dot{q}(t))$.

Vom presupune în cele ce urmează că $L_{q^i\dot{q}^j} = L_{\dot{q}^i q^j}, i, j = 1, \ldots, n$. În această ipoteză de simetrie, forma pătratică $Q(h) = \delta^2 J(q)h$ se poate scrie, după o integrare prin părţi, sub forma:

$$Q(q)h = \int_{t_0}^{t_1} (P(t)\dot{h}, \dot{h}) + (R(t)h, h)dt,$$

unde $P(t) = L_{\dot{q}\dot{q}}(t, q(t), \dot{q}(t))$, $R(t) = L_{qq}(t, q(t), \dot{q}(t)) - \dfrac{d}{dt}L_{q\dot{q}}(t, q(t), \dot{q}(t))$ sunt funcţii continue cu valori matrici simetrice iar $(\cdot, \cdot)$ este produsul scalar din $\mathbb{R}^n$. Ipoteza de simetrie ne uşurează scrierea şi calculele, însă poate fi evitată. Dacă nu este satisfăcută, în expresia lui $Q(q)h$, după integrarea prin părţi, mai apare un termen integral de forma $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} (A(t)h'(t), h(t))dt$ cu $A(t)_{ij} = (L_{\dot{q}^i q^j} - L_{q^i \dot{q}^j})(t, q(t), \dot{q}(t))$, iar $A(t)$ matrice antisimetrică. Esenţial este faptul că, dacă h este extremală pentru $Q(q)\cdot$, atunci $Q(q)h = 0$, lucru care rămâne adevărat şi dacă ipoteza respectivă nu este satisfăcută.

Condiţia necesară a lui Legendre se enunţă astfel:

TEOREMA 1.3.5. *Dacă q^* realizează infimul funcţionalei J, atunci, $\forall h \in \mathcal{H}$, $Q(q^*)h \geq 0$ şi $P(t)$ este pozitivă pentru orice $t \in (t_0, t_1)$, adică $\forall q \in \mathbb{R}^N$,$(P(t)q, q) \geq 0$.*

A doua ecuaţie a lui Euler este ecuaţia Euler-Lagrange asociată lui Q:

$$\frac{d}{dt}\left(P(t)\dot{h}\right) - R(t)h = 0 \tag{1.16}$$

Vom presupune în cele ce urmează că $P(t) > 0, \forall t$ $(L_{\dot{q}\dot{q}} > 0)$. Astfel, sistemul (1.16) este un sistem diferenţial de ordinul al doilea, nedegenerat. Fixând valoarea lui h în t_0, $h(t_0) = 0$, spaţiul soluţiilor este $n-$dimensional. O bază în spaţiul soluţiior este formată din soluţiile $\{h_1, \ldots, h_n\}$ care verifică problema Cauchy cu valorile iniţiale $h_i(t_0) = 0$, $\dot{h}_i(t_0) = e_i$, unde e_i sunt vectorii bazei canonice în $\mathbb{R}^n$.

DEFINIŢIA 1.3.3. *Fie q^* extremală pentru J. $(\bar{t}, q^*(\bar{t}))$ se numeşte conjugat cu (t_0, q_0) dacă vectorii $\{h_1(\bar{t}), \ldots, h_n(\bar{t})\}$ sunt liniar dependenţi. Altfel spus, există o soluţie nenulă a ecuaţiei (1.16) care se anulează în $t_0, \bar{t}$.*

TEOREMA 1.3.6. *(Condiţia necesară a lui Jacobi) Dacă q^* este minim local slab, atunci intervalul deschis (t_0, t_1) nu conţine puncte conjugate cu t_0.*

Condiţia suficientă de minim local slab se enunţă ca în cazul scalar:

TEOREMA 1.3.7. *Dacă intervalul închis $[t_0, t_1]$ nu conţine puncte conjugate cu t_0 atunci q^* este minim local slab.*

Demonstraţie Ideea este de a adăuga un termen la lagrangeanul lui Q care să nu schimbe valoarea acestuia (o integrală exactă) şi care să formeze sub integrală un pătrat perfect, de unde să rezulte că Q este o formă pătratică

pozitiv definită. Căutăm aşadar un termen de forma $\frac{d}{dt}(Wh,h)$ unde $W(t)$ este o matrice simetrică. Are loc:

$$Q(q^*)(h) = \int_{t_0}^{t_1} (P(t)\dot{h},h) + (R(t)h,h) + \frac{d}{dt}(W(t)h,h)dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (P(t)\dot{h},\dot{h}) + (R(t)h,h) + 2(W\dot{h}',h) + (W'h,h)dt$$

Pentru a obţine un pătrat perfect sub integrală ar trebui ca W să verifice *ecuaţia Riccati*

$$W' = -R + WP^{-1}W. \tag{1.17}$$

În acest caz

$$Q(q^*)(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left(P^{\frac{1}{2}}\dot{h} + P^{-\frac{1}{2}}Wh, P^{\frac{1}{2}}\dot{h} + P^{-\frac{1}{2}}Wh\right) dt.$$

$Q(q^*)$ se anulează numai dacă $P^{\frac{1}{2}}\dot{h}+P^{-\frac{1}{2}}Wh \equiv 0$ pe $[t_0,t_1]$. Cum $h(t_0)=0$, ar rezulta că $h \equiv 0$ deoarece verifică o problemă Cauchy pentru un sistem liniar omogen. Deci, ceea ce am obţinut până acum este că dacă putem rezolva ecuaţia Riccati (1.17) pe intervalul $[t_0,t_1]$, atunci $Q > 0$. Căutăm pe W de forma

$$W = -PU'U^{-1},$$

unde $U(t)$ este o funcţie matriceală. Astfel, dacă W satisface ecuaţia Riccati 1.17, atunci U verifică ecuaţia

$$-\frac{d}{dt}\left(PU'\right) + RU = 0.$$

Cum intervalul $(t_0,t_1]$ nu conţine puncte conjugate cu t_0, intervalul $[t_0-\delta,t_1]$ nu conţine puncte conjugate cu $t_0-\delta$ pentru un $\delta > 0$ suficient de mic (am extins funcţiile ce intervin P,R la intervalul $[t_0-\delta,t_0]$ ca funcţii continue). Soluţia acestei ecuaţii cu datele iniţiale $U(t_0-\delta) = 0_n$, $U'(t_0-\delta) = I_n$ există pe tot intervalul $[t_0-\delta,t_1]$ şi, întrucât acest interval nu conţine puncte conjugate cu $t_0-\delta$ soluţia are proprietatea că $\det(U(t)) \neq 0, t \in [t_0,t_1]$. Deci soluţia W a ecuaţie Riccati există pe întreg intervalul $[t_0,t_1]$ si astfel $Q > 0$. Raţionamentul funcţionează acum exact ca în cazul scalar(v. teorema 1.3.4). ■

Geodezicele varietăţilor riemanniene. Revenim la exemplul 1.1.6. Dacă γ este extremală pentru J (adică *geodezică*), reparametrizăm curba după lungimea de arc astfel încât, în coordonatele locale alese $L(q,\dot{q}) = 1$. Sistemul ecuaţiilor Euler-Lagrange se scrie astfel:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\dot{q}^i\dot{q}^j = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} g_{ik}\dot{q}^i,\ k = 1,\ldots,n.$$

Se notează cu

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{kl}(g_{lj,i} + g_{li,j} - g_{ij,l})$$

care se numesc simbolii lui Christoffel. Am notat cu $g_{ij,l} = \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial q^l}$ şi $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. Cu aceste notaţii ecuaţiile geodezicelor devin

$$\ddot{q}^k = \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \dot{q}^i \dot{q}^j,\ k = 1, \ldots, n.$$

Geodezicele sunt de asemenea extremale pentru funcţionala energie cu lagrangeanul $\tilde{L} = L(q, \dot{q})^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$.

1.4. Teorema lui Noether

Integrarea unui sistem de ecuaţii diferenţiale este echivalentă cu determinarea unui număr corespunzător de integrale prime funcţional independente (v. [**4**],[**33**],[**35**]). În cazul ecuaţiilor Euler-Lagrange este posibilă determinarea unei integrale prime dacă lagrangeanul este invariant la un grup de difeomorfisme. Acesta este conţinutul teoremei lui Noether. Pentru simplitate vom considera lagrangieni care nu depind explicit de t.

Fie φ un difeomorfism al varietăţii diferenţiabile M. Vom spune că lagrangeanul $L : TM \to \mathbb{R}$ este invariant la transformarea φ dacă $L(v) = L(\varphi_*(v))$. Am notat cu $\varphi_* : TM \to TM$ aplicaţia liniară tangentă definită în coordonate locale $(q, \dot{q})$ pe TM prin $\varphi_*(q, \dot{q}) = D\varphi(q)\dot{q}$. Facem aici observaţia că un difeomorfism care invariază lagrangeanul transformă extremale în extremale: dacă $q(t)$ este extremală (verifică ecuaţiile Euler-Lagrange), atunci $\varphi(q(t))$ este extremală.

TEOREMA 1.4.1. *Fie φ^s un C^1 grup de difeomorfisme ce invariază pe L. Atunci*

$$I(q, \dot{q}) = \left(L_{\dot{q}}(q, \dot{q}), \frac{d\varphi^s}{ds}(q)|_{s=0}\right) \tag{1.18}$$

este integrală primă pentru sistemul Euler-Lagrange.

Demonstraţie Fie $q(t)$ o curbă integrală pentru ecuaţiile Euler-Lagrange şi fie $\Phi(s, t) = h^s(q(t))$. Ţinând cont că h^s invariază pe L şi că $\Phi(s, \cdot)$ verifică ecuaţiile Euler-Lagrange, obţinem

$$0 = \frac{\partial}{\partial s}L(\Phi, \dot{\Phi}) = \left(L_q(\Phi, \dot{\Phi}), \frac{\partial}{\partial s}\Phi\right) + \left(L_{\dot{q}}(\Phi, \dot{\Phi}), \frac{\partial}{\partial s}\dot{\Phi}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t}L_{\dot{q}}(\Phi, \dot{\Phi}), \frac{\partial}{\partial s}\Phi\right) + \left(L_{\dot{q}}(\Phi, \dot{\Phi}), \frac{\partial}{\partial s}\dot{\Phi}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(L_{\dot{q}}(\Phi, \dot{\Phi}), \frac{\partial}{\partial s}\Phi\right).$$

Facem acum pe $s = 0$ şi, cum $\varphi^0 = Id$, obţinem că $\dfrac{d}{dt} I(q(t), \dot{q}(t)) = 0$ deci I este integrală primă. ■

Mecanica lagrangeană. Revenim acum la exemplul 1.1.3. Fie un sistem de n puncte materiale de mase m_i. Energia cinetică a acestui sistem este

$$T = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2}{2}.$$

Presupunem că sistemul este conservativ, adică există un potenţial al forţelor care acţionează asupra sistemului: $U = U(x_i, y_i, z_i)$. Lagrangeanul sistemului este $L = T - U$. Este uşor de văzut că euaţiile lui Euler nu sunt altceva decât ecuaţiile lui Newton. În prezenţa simetriilor, legi de conservare se obţin din teorema lui Noether. Astfel, dacă lagrangeanul este invariant la translaţii $\varphi^s : (x_i, y_i, z_i) \to (x_i + s, y_i, z_i)$, obţinem integrala primă

$$\sum_{i=1}^{n} L_{\dot{x}_i} = cst$$

adică proiecţia pe axa Ox a impulsului total al sistemului se conservă.

Dacă L este invariant la rotaţii

$$\varphi^s : (x_i, y_i, z_i) \to (x_i \cos s + y_i \sin s, -x_i \sin s + y_i \cos s, z_i),$$

se obţine din teorema lui Noether că

$$\sum_{i=1}^{n} L_{\dot{x}_i} y_i - L_{\dot{y}_i} x_i = cst,$$

adică componenta pe axa Oz a momentului cinetic total se conservă.

Mişcarea plană într-un câmp de forţe central Abordăm aici exemplul 1.1.4. Lagrangeanul, în coordonate polare $q = (r, \theta)$, este $L(r, \theta) = \dfrac{m\dot{r}^2}{2} + \dfrac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} - U(r)$. Ecuaţiile Euler-Lagrange sunt

$$\begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -U'(r) \\ 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0 \quad . \end{cases}$$

Întrucât lagrangeanul nu depinde explicit de t, energia $L - \dot{q} \cdot L_{\dot{q}} = cst$, deci avem o integrală primă

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} + U(r) = cst.$$

O a doua integrală primă se obţine fie integrând a doua ecuaţie, fie observând că lagrangeanul este invariant la grupul de difeomorfisme $\varphi^s(r, \theta) = (r, \theta + s)$ şi aplicând teorema lui Noether obţinem că

$$M = r^2\dot{\theta} = cst.$$

Aceasta reprezintă a doua lege a lui Kepler. Este de fapt vorba despre conservarea momentului cinetic şi acest lucru are următoarea interpretare

geometrică: viteza areolară (viteza de variaţie a ariei descrise de raza vectoare) este constantă. Introducând această integrală primă în prima ecuaţie din sistemul Euler-Lagrange obţinem ecuaţia

$$m\ddot{r} = \frac{K}{r^3} - U'(r).$$

cu $K = \dfrac{M^2 m}{2}$ constantă pozitivă. Această ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea şi autonomă poate fi integrată. Astfel se reduce sistemul la studiul unei mişcări 1-dimensionale cu potenţial $V(r) = U(r) + \dfrac{K}{2r^2}$. Avem integrala primă a energiei pentru această ecuaţie care conduce la o ecuaţie de ordinul întâi:

$$\dot{r} = \sqrt{2(E - V(r))/m}$$

şi care combinată cu expresia lui M ne dă următoarea ecuaţie pentru r ca funcţie de θ, $r = r(\theta)$:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2\sqrt{2(E - V(r))/m}}{M}.$$

Dacă mişcarea are loc în câmp central gravitaţional, potenţialul U este de forma $U(r) = -\dfrac{k}{r}, k > 0$. Soluţiile se găsesc de forma

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta},$$

care este ecuaţia unei conice în coordonate polare. Dacă traiectoria este mărginită ($e \in (-1, 1)$), atunci ea este elipsă cu unul din focare în O. Aceasta este prima lege a lui Kepler, cu referire la mişcarea planetelor în jurul soarelui. Pentru un studiu detaliat al mişcării unui punct material într-un câmp de forţe central, v. [**3**]. ■

CAPITOLUL 2

Formalismul canonic

2.1. Sisteme hamiltoniene

Considerăm din nou sistemul de *ecuaţii Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

care este format din n ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea. Ne propunem în continuare să reducem ordinul sistemului tansformându-l într-un sistem de $2n$ ecuaţii de ordinul I. Vom presupune că $L \in C^2$ şi

$$(L_{\dot{q}\dot{q}}(t,q,\dot{q})) \text{ este nesingulară } \forall\, t,q,\dot{q}, \tag{2.1}$$

ceea ce înseamnă că sistemul Euler-Lagrange este sistem de ordinul al doilea nedegenerat. Aceasta se întâmplă dacă lagrangeanul este regulat. Notăm cu

$$p_i = L_{\dot{q}^i}(t,q,\dot{q}). \tag{2.2}$$

p_i se numesc *variabile conjugate* iar ansamblul variabilelor (q,p) formează *variabilele canonice*. Teorema funcţiilor implicite, care poate fi aplicată ţinând cont de ipoteza de nedegenerare, ne spune că ecuaţiile (2.2) definesc un difeomorfism local de la spaţiul $(t,q,\dot{q})$ în spaţiul (t,q,p) şi, după cum vom vedea mai târziu, de la fibratul tangent în fibratul cotangent. *Hamiltonianul sistemului* se defineşte, cu ajutorul acestui difeomorfism local, prin

$$H(t,q,p) = -L(t,q,\dot{q}) + \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i \tag{2.3}$$

Ne interesează să scriem ecuaţiile Euler-Lagrange în noile coordonate. Pentru aceasta calculăm diferenţiala lui H, ţinând cont de (2.2),(2.3):

$$dH = -dL + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}^i dp_i + \sum_{i=1}^{n} p_i d\dot{q}^i =$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial t}dt - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q^i}dq^i - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}d\dot{q}^i + \sum_{i=1}^{n}\dot{q}^i dp_i + \sum_{i=1}^{n} p_i d\dot{q}^i =$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial t}dt - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q^i}dq^i + \sum_{i=1}^{n}\dot{q}^i dp_i.$$

Din ecuaţiile Euler-Lagrange ştim însă că $\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{d}{dt}p_i$ deci, evaluând în coordonatele (t, q, p) diferenţiala lui H, obţinem sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t} \\ \dfrac{\partial H}{\partial \dot{q}^i} = -\dfrac{\partial L}{\partial q^i} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i \end{cases}$$

Ultimele două ecuaţii le scriem în forma

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = \dfrac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases} . \tag{2.4}$$

Acesta este *sistemul hamiltonian* care este un sistem de $2n$ ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. Acesta mai poate fi scris şi în forma:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = J\nabla H \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix},$$

unde $J = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

Transformata Legendre

Fie $f : D(f) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexă, inferior semicontinuă.

Transformata Legendre a lui f este funcţia convexă $f^* : D(f^*) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definită prin

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [(x^*, x) - f(x)].$$

Subdiferenţiala funcţiei f în punctul x_0 este mulţimea

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in \mathbb{R}^n | (x^*, x - x_0) \leq f(x) - f(x_0)\}.$$

Facem aici observaţia că dacă f este diferenţiabilă Gâteaux atunci $\partial f(x_0) = \nabla f(x_0)$.

Are loc următorul rezultat:

Teorema 2.1.1. *Următoarele condiţii sunt echivalente:*
i) $x^* \in \partial f(x)$
ii) $x \in \partial f^*(x^*)$
iii) $f(x) + f^*(x^*) = (x^*, x)$.

Pentru demonstraţie, precum şi pentru studiul detaliat al funcţiilor convexe se pot consulta monografiile [**34**],[**6**].

Presupunem în cele ce urmează că lagrangeanul L este în plus funcţie convexă în raport cu variabila $\dot{q}$, ceea ce împreună cu condiţia de nedegenerare (2.1) ne spune că lagrangeanul L este regulat şi strict convex în raport cu $\dot{q}$. Observăm că hamiltonianul H nu este altceva decât transformata Legendre a lagrangeanului L în raport cu variabila $\dot{q}$:

$$H(t,q,p) = \sup_{\dot{q}\in\mathbb{R}^n} \{(p,\dot{q}) - L(t,q,\dot{q})\}.$$

Într-adevăr, supremul se atinge într-un punct $\dot{q}$ cu proprietatea că diferenţiala funcţiei din paranteză în raport cu $\dot{q}$ este 0, adică are loc $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t,q,\dot{q})$. Facem aici observaţia că, în general, transformata Legendre a unei funcţii convexe, inferior semicontinue pe un spaţiu normat, este definită pe dualul acelui spaţiu normat. Cum lagrangeanul L este definit pe fibratul tangent TM al unei varietăţi diferenţiabile M, hamiltonianul H este definit în mod natural pe fibratul cotangent T^*M. Calculele pe care le-am făcut şi formulele obţinute până acum sunt valabile şi în cazul unei varietăţi diferenţiabile M, în coordonatele locale pe această varietate.

Dăm în continuare o alta formulare a ecuaţiilor lui Hamilton, care ne va ajuta să identificăm acele transformări, numite şi canonice, care lasă invariantă forma sistemului. Acestea sunt transformări care păstrează structura simplectică a fibratului cotangent T^*M.

Considerăm aşadar o funcţie $F(t,q,p)$, netedă şi ne interesează cum variază aceasta de-a lungul traiectoriilor sistemului (2.4). Astfel,

$$\frac{d}{dt}F(t,q(t),p(t)) = \frac{\partial}{\partial t}F(t,q,p) + \frac{\partial F}{\partial q}\cdot\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p}\cdot\dot{p} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}F(t,q,p) + \frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial t}F(t,q,p) + \{H,F\}$$

unde $\{H,F\} = \dfrac{\partial H}{\partial p}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial q} - \dfrac{\partial H}{\partial q}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial p}$ reprezintă *paranteza Poisson* a funcţiilor H, F. *Forma Lax* a sistemului hamiltonian (2.4) este dată de

$$\frac{d}{dt}F(t,q,p) = \frac{\partial}{\partial t}F(t,q,p) + \{H,F\}. \tag{2.5}$$

Observaţia 2.1.1. *Dacă F nu depinde explicit de t atunci ecuaţia (2.5) devine $\dfrac{d}{dt}F(q,p) = \{H,F\}$ şi condiţia ca F să fie integrală primă pentru sistemul (2.4) se scrie $\{H,F\} = 0$. Dacă în plus H nu depinde de t atunci H este integrală primă. În cazul sistemelor mecanice, H are semnificaţie de energie; aceasta se conservă dacă hamiltonianul nu depinde explicit de timp.*

Observaţia 2.1.2. *Paranteza Poisson are următoarele proprietăţi ce se verifică prin calcul direct:*

- $\{H,F\} = -\{F,H\}$ *(antisimetrie)*
- $\{\{F,G\},H\}+\{\{G,H\},F\}+\{\{H,F\},G\}=0$ *(identitatea lui Jacobi)*

Paranteza Poisson defineşte astfel pe $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ o structură de algebră Lie.

Transformări canonice.

Ne propunem să găsim o schimbare de coordonate $T : (q,p) \to (Q,P)$ care să transforme sistemele de forma (2.4) în sisteme de aceeaşi formă, eventual mai uşor de integrat. Folosim pentru aceasta forma (2.5) a sistemului hamiltonian. Fie $F = F(q,p)$ un hamiltonian neted şi notăm cu $\bar{F}(Q,P) = F(q,p)$. Dorim ca ecuaţia (2.5) în noile cooronate să aibă aceeaşi formă şi anume

$$\frac{d}{dt}\bar{F} = \{\bar{F}, \bar{H}\}_{(Q,P)}.$$

Acest lucru are loc pentru orice F, H dacă şi numai dacă

$$\{\bar{F}, \bar{H}\}_{(Q,P)} = \{F, H\}_{(q,p)},$$

de unde rezultă condiţia necesară şi suficientă:

$$\begin{array}{l} \{P_i, Q^j\}_{(q,p)} = \delta_i^j \\ \{Q^i, Q^j\}_{(q,p)} = 0 \\ \{P_i, P_j\}_{(q,p)} = 0, \ \ i,j = \overline{1,n}. \end{array} \tag{2.6}$$

Transformările care verifică aceste condiţii se numesc *transformări canonice*.

Un alt punct de vedere care ne conduce la definirea transformărilor canonice este legat de echivalenţa dintre ecuaţiile Euler-Lagrange şi ecuaţiile lui Hamilton. Mai precis, să observăm că extremalele pentru $\int L(t,q,\dot{q})dt$ sunt proiecţiile extremalelor pentru $\int -H(t,q,p) + \dot{q}pdt$ pe spaţiul q. Dacă considerăm acum schimbarea de coordonate $(q,p) \to (Q,P)$ iar hamiltonianul în noile coordonate este H^* , i.e. $H^*(t,Q,P) = H(t,q,p)$, punem condiţia ca extremalele pentru $\int -H(t,q,p)+\dot{q}pdt$ să coincidă cu extremalele pentru $\int -H^*(t,Q,P) + \dot{Q}Pdt$. Aceasta se întâmplă dacă există o funcţie netedă pe fibratul cotangent T^*M, $S = S(t,q,p)$ astfel încât

$$-H(t,q,p)dt + pdq = -H^*(t,Q,P)dt + PdQ + dS, \tag{2.7}$$

adică cei doi integranzi diferă printr-o diferenţială exactă. S se numeşte *funcţie generatoare* a transformării canonice. Dacă S se poate scrie ca o funcţie $S = S_1(t,q,Q)$, atunci din 2.7 rezultă că

$$\begin{cases} H^* = H + \dfrac{\partial S_1}{\partial t}(t,q,Q) \\ p = \dfrac{\partial S_1}{\partial q}(t,q,Q) \\ P = -\dfrac{\partial S_1}{\partial Q}(t,q,Q) \end{cases} \tag{2.8}$$

A doua ecuaţie se poate rezolva, local, folosind teorema funcţiilor implicite, dacă $\dfrac{\partial^2 S_1}{\partial q \partial Q}$ este matrice nesingulară, caz în care se obţine $Q = Q(q,p)$. A treia ecuaţie ne furnizează $P = P(q,p)$. Se pot construi şi alte funcţii generatoare care să depindă de alt grup de variabile. De exemplu, dacă adunăm $d(PQ)$ la (2.7), notăm cu $S_2 = S + PQ$ şi privim pe pe S_2 ca funcţie de (t,q,P), $S_2 = S_2(t,q,P)$ obţinem

$$(H^* - H)dt + pdq + qdP = dS_2 \tag{2.9}$$

deci

$$\begin{cases} H^* = H + \dfrac{\partial S_2}{\partial t}(t,q,P) \\ \\ p = \dfrac{\partial S_2}{\partial q}(t,q,P) \\ \\ Q = \dfrac{\partial S_2}{\partial P}(t,q,P) \end{cases} . \tag{2.10}$$

Aceste ecuaţii definesc o transformare canonică dacă $\dfrac{\partial^2 S_2}{\partial q \partial P}$ este matrice nesingulară.

2.2. Variaţia totală a unei funcţionale

Considerăm din nou funcţionala $J(q) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} L(t,q,\dot{q})dt$ şi vom presupune de data aceasta că (t_0,q_0), respectiv (t_1,q_1), se mişcă pe câte o subvarietate M_0, respectiv M_1 din spaţiul (t,q). Ne propunem să calculăm prima variaţie a funcţionalei J. Pentru aceasta să considerăm o familie de curbe $q^s = q^s(t)$, $q^0 = q$, definite pe $(t_0(s), t_1(s))$, cu $(t_i(s), q^s(t_i(s))) \in M_i$, $i = 0,1$ şi depinzând neted de s. Notăm cu $q_i(s) = q^s(t_i(s)), i = 0,1$ şi cu

$$h(t) = \frac{d}{ds}|_{s=0} q^s(t),\ t \in (t_0,t_1).$$

Derivata în raport cu s o notăm cu $'$. Prima variaţie a lui J în q, în direcţia h, este

$$\delta J(q)h = \frac{d}{ds}|_{s=0} J(q^s) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} L_q(t,q,\dot{q})\cdot h + L_{\dot{q}}(t,q,\dot{q})\cdot \dot{h}dt + L(t_1,q_1,\dot{q}(t_1))t_1'(0) - L(t_0,q_0,\dot{q}(t_0))t_0'(0) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(L_q(t,q,\dot{q}) - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}}(t,q,\dot{q}) \right) \cdot h dt +$$

$$+ L_{\dot{q}}(t,q,\dot{q})h|_{t_0}^{t_1} + L(t_1,q_1,\dot{q}(t_1))t_1'(0) - L(t_0,q_0,\dot{q}(t_0))t_0'(0).$$

Notăm cu $p = L_{\dot{q}}(t, q, \dot{q})$ şi cu $H = -L + \dot{q} \cdot L_{\dot{q}} = p \cdot \dot{q} - L$. Amintim că (q, p) sunt variabilele canonice iar H este hamiltonianul sistemului. De asemenea, $h(t_i) = q_i'(0) - \dot{q}(t_i), i = 0, 1$. Astfel, prima variaţie poate fi scrisă în forma:

$$\delta J(q)h = \int_{t_0}^{t_1} \left(L_q - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}} \right) \cdot h dt + (p\delta q - H\delta t)|_{t=t_0}^{t=t_1}. \tag{2.11}$$

O *extremală* pentru problema generală de calculul variaţiilor este o curbă q^* pentru care $\delta J(q^*) = 0$ şi este, desigur, o extremală pentru problema simplă de calculul variaţiilor, când capetele sunt fixate. Luând aşadar $h(t_0) = h(t_1) = 0$ cu t_0, t_1 de asemenea fixate, obţinem că o extremală q^* trebuie să verifice în primul rând ecuaţiile Euler-Lagrange. Pentru o extremală q^* are în plus loc

$$\delta J(q^*)h = (p\delta q - H\delta t)|_{t=t_0}^{t=t_1} = 0.$$

În concluzie, extremalele pentru problema generală de calculul variaţiilor verifică sistemul

$$\begin{cases} L_q - \dfrac{d}{dt} L_{\dot{q}} = 0 \\ \\ (p\delta q - H\delta t)|_{t=t_0}^{t=t_1} = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Exemplul 2.2.1. *Distanţa dintre două curbe* Considerăm două curbe în $\mathbb{R}^n, q_0 = \varphi(t_0), q_1 = \psi(t_1)$. O curbă $q = q(t)$, $q(t_0) = q_0$, $q(t_1) = q_1$ are lungimea $J(q) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{q}^2} dt$. Distanţa între cele două curbe date este o extremală pentru J. Variabilele canonice sunt q, $p = \dfrac{\dot{q}}{\sqrt{1 + \dot{q}^2}}$ iar hamiltonianul $H = -\dfrac{1}{\sqrt{1 + \dot{q}^2}}$. Cum lagrangeanul nu depinde de t, $H = cst$ deci $\dot{q} = cst$ şi distanţa se atinge pe o dreaptă $q(t) = at + b$.
Condiţia a doua din (2.12) devine

$$(p_1 \psi'(t_1) - H|_{t=t_1})\delta t_1 - (p_0 \varphi'(t_0) - H_{t=t_0})\delta t_0 = 0$$

şi cum $\delta t_0, \delta t_1$ sunt variaţii independente, rezultă că $0 = p_1 \psi'(t_1) - H|_{t=t_1} = p_0 \varphi'(t_0) - H_{t=t_0}$ Deci

$$\dot{q}(t_0) = -\frac{1}{\varphi'(t_0)}, \; \dot{q}(t_1) = -\frac{1}{\psi'(t_0)},$$

relaţii care exprimă faptul că extremala trebuie să fie ortogonală în q_0, q_1 pe curbele date.

Acestea sunt *condiţii de transversalitate* şi se regăsesc în aceeaşi formă în cazul mai general al unui lagrangean de forma $L(t, q, \dot{q}) = f(t, q)\sqrt{1 + \dot{q}^2}$. Dacă t_0, t_1 sunt fixate iar q_0, q_1 se mişcă liber pe subvarietăţile diferenţiabile $M_0, M_1 \subset M$, atunci, pentru un lagrangean general, condiţiile de transversalitate ne spun că starea adjunctă p este perpendiculară în capete pe varietăţile respective: $p_i = p(t_i) \perp M_i, i = 0, 1$. ■

Extremale nenetede. Condiţiile Weierstrass-Erdmann.

Considerăm acum cazul în care o extremală $q = q(t)$ este nenetedă, mai precis este continuă şi de clasă C^1 pe porţiuni. Fie intervalele deschise (t_0, c) şi (c, t_1) pe care presupunem că h este netedă iar în c avem salt al derivatei $\dot{q}$. Vom nota cu J_1, respectiv J_2, funcţionala calculată pe intervalele (t_0, c) şi respectiv (c, t_1). Are loc atunci

$$\delta J = \delta J_1 + \delta J_2.$$

Dar

$$\delta J_1 = L_{\dot{q}} \delta q|_{t=c-0} - H|_{t=c-0} \delta c,$$

$$\delta J_2 = -L_{\dot{q}} \delta q|_{t=c+0} + H|_{t=c+0} \delta c.$$

Obţinem aşadar

$$\delta J = L_{\dot{q}}|_{t=c+0}^{t=c-0} \delta q|_{t=c} + H|_{t=c-0}^{t=c+0} \delta c.$$

Cum $\delta q(c)$ şi δc sunt variaţii independente, rezultă că

$$\begin{cases} L_{\dot{q}}|_{t=c-0} = L_{\dot{q}}|_{t=c+0} \\ \\ -L + \dot{q} \cdot L_{\dot{q}}|_{t=c-0} = -L + \dot{q} \cdot L_{\dot{q}}|_{t=c+0}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Acestea sunt *condiţiile Weierstrass-Erdmann* care exprimă faptul că, de-a lungul extemalelor, variabilele canonice q, p şi hamiltonianul H sunt funcţii continue.

2.3. Ecuaţia Hamilton-Jacobi. Metoda lui Jacobi de integrare a sistemelor hamiltoniene

În cele ce urmează presupunem că lagrangeanul L este regulat, adică matricea $(L_{\dot{q}\dot{q}})$ este matrice nesingulară. Aceasta înseamnă că sistemul 1.4 este un sistem diferenţial de ordinul 2, nedegenerat. Dacă fixăm $q(t_0)$, atunci soluţia sistemului 1.4 depinde de n parametri $\dot{q}$, deci pentru (t, q) într-o vecinătate suficient de mică a lui (t_0, q_0), există o unică extremală care uneşte (t_0, q_0) cu (t, q); o notăm cu $\gamma_{t,q}$ şi definim funcţia

$$S(t, q) = J(\gamma_{t,q}).$$

Proprietatea de dependenţă diferenţiabilă de datele iniţiale a soluţiei problemei Cauchy pentru ecuaţiile Euler-Lagrange ne asigură că $S \in C^1$. În cele ce urmează, studiem funcţia S şi arătăm că ea satisface o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi. Fie $t = t(s), t(0) = \bar{t}$, $q = q(s), q(0) = \bar{q}$ curbe netede. Atunci:

$$\frac{d}{ds} S(t(s), q(s))|_{s=0} = \frac{\partial S}{\partial t}(\bar{t}, \bar{q}) t'(0) + \frac{\partial S}{\partial q}(\bar{t}, \bar{q}) \cdot q'(0).$$

Pe de altă parte, folosind (2.11), obţinem

$$\frac{d}{ds} J(\gamma_{t(s),q(s)})|_{s=0} = p(\bar{t}) \cdot q'(0) - H(\bar{q}, p(\bar{t})) t'(0)$$

Cum $(\bar{t}, \bar{q})$ este arbitrar în vecinătatea lui (t_0, q_0), din cele două relaţii obţinem că:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}(t,q),\ H(t,q,p) = -\frac{\partial S}{\partial t}(t,q),$$

deci

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t,q) + H(t,q,\frac{\partial S}{\partial q})(t,q) = 0. \tag{2.14}$$

Aceasta este *ecuaţia Hamilton-Jacobi*, o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul I. Sistemul hamiltonian (2.4) reprezintă sistemul caracteristic pentru această ecuaţie cu derivate parţiale. Curbele integrale ale sistemului hamiltonian sunt caracteristicile ecuaţiei Hamilton-Jacobi (vezi [**4**],[**35**]). Metoda caracteristicilor se aplică pentru integrarea ecuaţiei cu derivate parţiale folosind sistemul caracteristicilor. Metoda lui Jacobi, care va fi prezentată în continuare, se foloseşte pentru a găsi curbele integrale pentru sistemul hamiltonian (2.4) folosind o soluţie generală a ecuaţiei Hamilton-Jacobi (2.14), soluţie care trebuie să depindă de exact n parametri. Acest lucru se întâmplă, după cum se va vedea, în cazul în care variabilele se pot separa.

TEOREMA 2.3.1. (*Jacobi*) . *Presupunem că* $S = S(t, q, C_1, \ldots, C_m)$ *este o soluţie a ecuaţiei* (2.14)*, soluţie ce depinde neted de* m *parametri* $C_1, \ldots, C_m$ *Atunci* $D_j = \dfrac{\partial S}{\partial C_j}, j = \overline{1,m}$ *sunt integrale prime pentru sistemul hamiltonian* (2.4)*. Dacă soluţia depinde de* n *parametri* $C_1, \ldots, C_n$ *astfel încât*

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial C_j}\right)_{i,j=\overline{1,n}} = n, \tag{2.15}$$

atunci o soluţie generală a sistemului hamiltonian (2.4)*, depinzând de* $2n$ *constante de integrare* $C_i, D_i, i = \overline{1,n}$*, este dată, prin intermediul teoremei funcţiilor implicite, de*

$$\begin{cases} D_i = \dfrac{\partial S}{\partial C_i}(t,q,C) \\ \\ p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q^i}(t,q,C) \end{cases}. \tag{2.16}$$

Demonstraţie Derivăm ecuaţia (2.14) în raport cu C_j şi obţinem:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial C_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial C_j} = 0.$$

Obţinem că

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial C_j}(t,q(t),C)\right)=\frac{\partial^2 S}{\partial t\partial C_j}(t,q(t),C)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial C_j}(t,q(t),C)\dot{q}^i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial C_j}(t,q(t),C)\left(\dot{q}^i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)=0$$

şi prima parte a teoremei este demonstrată.

Cnsiderăm acum sistemul (2.16). Teorema funcţiilor implicite aplicată în (2.16), folosind condiţia de nedegenerare (2.15), ne asigură existenţa locală a funcţiilor $q(t,C,D),p(t,C,D)$. Ceea ce rămâne de demonstrat este că funcţiile q,p verifică sistemul hamiltonian (2.4). Derivând prima ecuaţie în raport cu t, cu un calcul similar cu cel anterior şi folosind ecuaţia (2.14), obţinem

$$0=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial C_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial C_j}\left(\dot{q}^i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right).$$

Folosind din nou condiţia de nedegenerare (2.15), avem că $\dot{q}^i=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, adică primul grup de ecuaţii din (2.4).
Derivăm acum a doua ecuaţie din (2.16) şi, folosind si ecuaţia (2.14), obţinem

$$\begin{aligned}\dot{p}_i &= \frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial q^i}(t,q,C)=\frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial t}(t,q,C)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial q^j}(t,q,C)\dot{q}^j=\\ &=-\frac{\partial}{\partial q^i}H(t,q,\frac{\partial S}{\partial q}(t,q,C))+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial q^j}(t,q,C)\frac{\partial H}{\partial p_j}=\\ &=-\frac{\partial H}{\partial q^i}(t,q,p)+\sum_{j=1}^{n}\left(\dot{q}^i-\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\frac{\partial^2 S}{\partial q^i\partial q^j}=-\frac{\partial H}{\partial q^i}(t,q,p).\end{aligned}$$

■

Observaţia 2.3.1. *Putem privi pe S ca funcţie generatoare, $P_i=C_i$ noile impulsuri generalizate, $Q^i=D_i$ noile coordonate generalizate. Schimbarea canonică de coordonate este dată de* (2.10). *În noul sistem de coordonate (Q,P), hamiltonianul este $H^*=0$ iar curbele integrale sunt $Q^i=cst,P_i=cst$, adică exact* (2.16).

Observaţia 2.3.2. *Presupunem că în hamiltonianul H una din variabile se separă, mai precis*

$$H(t,q,p)=H_1(q^1,p_1)+\tilde{H}(t,\tilde{q},\tilde{p}),$$

unde $\tilde{q}=(q^2,\ldots,q^n)$, $\tilde{p}=(p_2,\ldots,p_n)$. Atunci putem căuta soluţia ecuaţiei Hamilton-Jacobi (2.14) de forma $S(t,q)=S_1(q^1)+\tilde{S}(t,\tilde{q})$ unde S_1, S_2

verifică ecuaţiile de tipul (2.14):

$$H_1(q^1, S_1'(q_1)) = C_1$$

$$\tilde{S}_t + \tilde{H}(t, \tilde{q}, \tilde{S}_{\tilde{q}}) = -C_1.$$

Prima este de fapt o ecuaţie diferenţială care, dacă poate fi adusă la formă normală prin teorema funcţiilor implicite, devine o ecuaţie cu variabile separabile care poate fi integrată. Unei ecuaţii Hamilton-Jacobi i se poate găsi o soluţie generală depinzând de n constante dacă toate variabilele se separă.

Atracţia de către două mase egale, fixe. Considerăm exemplul 1.1.5. Hamiltonianul sistemului se calculează (folosind de exemplu transformata Legendre) şi se obţine

$$H(\xi_1, \xi_2, p_1, p_2) = 2p_1^2 \frac{\xi_1^2 - 4l^2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} + 2p_2^2 \frac{4l^2 - \xi_2^2}{\xi_1^2 - \xi_2^2} - \frac{4k\xi_1}{\xi_1^2 - \xi_2^2}.$$

Căutăm o soluţie generală pentru ecuaţia Hmilton-Jacobi corespunzătoare. Pentru aceasta să observăm că variabilele se separă ţdacă scriem ecuaţia sub forma

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi_1}\right)^2 (\xi_1^2 - 4l^2) + \left(\frac{\partial S}{\partial \xi_2}\right)^2 (4l^2 - \xi_2^2) = C_1(\xi_1^2 - \xi_2^2) + 4k\xi_1.$$

Separăm variabilele şi căutăm soluţii pentru următoarele ecuaţii Hamilton-Jacobi:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi_1}\right)^2 (\xi_1^2 - 4l^2) - 4k\xi_1 - C_1\xi_1^2 = C_2,$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi_2}\right)^2 (4l^2 - \xi_2^2) + C_1\xi_2^2 = -C_2.$$

Găsim soluţia generală

$$S(\xi_1, \xi_2, C_1, C_2) = \int \sqrt{\frac{4k\xi_1 + C_1\xi_1^2 + C_2}{\xi_1^2 - 4l^2}} d\xi_1 + \int \sqrt{\frac{-C_1\xi_2^2 - C_2}{4l^2 - \xi_2^2}} d\xi_2.$$

deci găsim, cu ajutorul teoremei 2.3.1, forma explicită a taiectoriilor sistemului mecanic considerat.

Partea 2

Controlul sistemelor diferenţiale

CAPITOLUL 3

Controlul sistemelor liniare

3.1. Controlabilitatea sistemelor liniare

Considerăm *sistemul liniar controlat*

$$\begin{cases} y' = A(t)y + B(t)u \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

unde $t \to A(t) \in M_n(\mathbb{R}), t \to B(t) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ sunt funcţii continue. Mulţimea controalelor admisibile este în cele ce urmează $\mathcal{U} = L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$. Soluţia sistemului (3.1) este dată de formula variaţiei constantelor:

$$y^u(t) = S(t,0)y_0 + \int_0^t S(t,s)Bu(s)ds,$$

unde $S(t,s) = X(t)X(s)^{-1}$ cu $X(t)$ matrice fundamentală a sistemului liniar omogen $y' = A(t)y$. Vom mai nota soluţia y^u cu $y^{y_0,u}$, atunci când va fi necesar să punem în evidenţă şi starea iniţială. Noţiunile de controlabilitate nulă, aproximativă, exactă şi de stabilizabilitate au fost introduse în capitolul introductiv, pag. 4. În cazul sistemelor liniare de tipul (3.1), când A, B sunt matrici constante, vom mai spune despre perechea (A,B) că are proprietăţile menţionate, adică este controlabilă, stabilizabilă etc.
Fie acum sistemul adjunct:

$$\begin{cases} p' + A^*(t)p = 0 \\ p(T) = \xi \end{cases} \tag{3.2}$$

Soluţia acestui sistem este $p(t) = S^*(T,t)\xi$.

Teorema 3.1.1. *i) Sistemul liniar* (3.1) *este aproximativ controlabil în timp T dacă şi numai dacă, pentru p soluţie a sistemului adjunct,*

$$B^*p(t) \equiv 0,\ t \in (0,T) \Rightarrow p(t) \equiv 0,\ t \in (0,T). \tag{3.3}$$

ii) Sistemul (3.1) *este exact nul controlabil în timp T dacă şi numai dacă există o constantă C astfel încât pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$, soluţia sistemului adjunct (3.2) verifică*

$$|p(0)|^2 \le C\int_0^T |B^*p(t)|^2 dt. \tag{3.4}$$

Demonstraţie *i*) Notăm cu

$$X(T) = \left\{ \int_0^T S(T,s)Bu(s)ds | u \in \mathcal{U} \right\},$$

mulţimea stărilor finale posibile pentru sistem, cu starea iniţială $y_0 = 0$. Sistemul este aproximativ controlabil dacă şi numai dacă $\overline{X(T)} = \mathbb{R}^n$ sau, echivalent,

$$\left(\xi, \int_0^T S(T,s)Bu(s)ds\right)_{\mathbb{R}^n} = 0, \forall u \in \mathcal{U} \Rightarrow \xi = 0.$$

Are loc însă egalitatea

$$\left(\xi, \int_0^T S(T,s)Bu(s)ds\right)_{\mathbb{R}^n} = \left(B^*S^*(T,\cdot)\xi, u(\cdot)\right)_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)}$$

şi concluzia rezultă imediat dacă ţinem seama de faptul că soluţia sistemului adjunct (3.2) este $p(t) = S^*(T,s)\xi$.

ii) Sistemul este exact nul controlabil în timp T dacă şi numai dacă, pentru orice $y_0 \in \mathbb{R}^n$, există $u \in \mathcal{U}$ astfel încât $S(T,0)y_0 = -\int_0^T S(T,s)Bu(s)ds$ sau, echivalent, există $\rho > 0$ astfel încât

$$S(T,0)y_0 \in \left\{\int_0^T S(T,s)Bu(s)ds : \|u\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} \leq \rho\right\}.$$

Date două mulţimi convexe şi închise $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$, atunci $A_1 \subset A_2$ dacă şi numai dacă $H_1(\xi) \leq H_2(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, unde H_i sunt funcţiile suport ale mulţimilor A_i, definite prin $H_i(\xi) = \sup_{y \in A_i}(\xi, y)$, $i = 1, 2$. Alegem $A_1 = \{S(T,0)y_0\}$ şi $A_2 = \left\{\int_0^T S(T,s)Bu(s)ds, \|u\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} \leq \rho\right\}$. Funcţiile suport ale acestor mulţimi sunt

$$H_1(\xi) = (\xi, S(T,0)y_0), \ H_2(\xi) = \rho\|B^*(\cdot)S^*(T,\cdot)\xi\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)}.$$

Dacă are loc (3.4), atunci $H_1(\xi) \leq |y_0||S^*(T,0)\xi| \leq H_2(\xi)$ dacă alegem $\rho = \sqrt{C}|y_0|$.

Reciproc, dacă sistemul (3.1) este nul controlabil, rezultă că, pentru orice $y_0 \in \mathbb{R}^n$, există $\rho > 0$ astfel încât pentru orice $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$(\xi, S(T,0)y_0) \leq \rho\|B^*(\cdot)S^*(T,\cdot)\xi\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)}.$$

Presupunem prin reducere la absurd că inegalitatea (3.4) nu are loc. Există atunci un şir $\xi_n \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$|S^*(T,0)\xi_n| \geq n\left(\int_0^T |B^*(t)S^*(T,t)\xi_n|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Putem presupune, după o eventuală rescalare, că $|\xi_n| = 1$ şi, trecând la un subşir convergent, să găsim la limită $\xi, |\xi| = 1$ astfel încât $B^*(t)S^*(T,t)\xi \equiv 0$, $t \in (0,T)$. De aici, folosind ipoteza de controlabilitate, avem că pentru orice $y_0 \in \mathbb{R}^n, (\xi, S(T,0)y_0) = 0$, deci $S^*(T,0)\xi = 0$. Cum $S^*(T,0)$ este nesingulară, rezultă că $\xi = 0$, ceea ce contrazice faptul că $|\xi| = 1$.

■

OBSERVAŢIA 3.1.1. *Proprietatea* (3.3) *se numeşte proprietate de unică continuare. Inegalitatea* (3.4) *se numeşte inegalitate de observabilitate şi aceasta implică unica continuare. În cazul sistemelor diferenţiale finit dimensionale pe care le studiem aici, facem observaţia că cele două proprietăţi sunt echivalente şi sunt de asemenea echivalente cu controlabilitatea exactă a sistemului. Într-adevăr, dacă sistemul este aproximativ controlabil, rezultă că* $\overline{X(T)} = \mathbb{R}^n$ *şi, cum subspaţiile spaţiului euclidian* $\mathbb{R}^n$ *sunt subspaţii închise, rezultă că* $X(T) = \mathbb{R}^n$*, deci sistemul este controlabil*

Acest lucru rezultă şi din următoarea teoremă care, în plus, ne dă o altă caracterizare a controlabilităţii şi o formă explicită a controlului care transformă starea iniţială a în starea finală b.

TEOREMA 3.1.2. *Fie operatorul (matricea de controlabilitate):*

$$Q_T = \int_0^T S(T,s)B(s)B^*(s)S^*(T,s)ds.$$

Sistemul (3.1) *este aproximativ controlabil dacă şi numai dacă* Q_T *este matrice nesingulară. În acest caz sistemul este exact controlabil şi controlul*

$$u^*(t) = -B^*(t)S^*(T,t)Q_T^{-1}(S(T,0)a - b)$$

transformă starea iniţială a în starea finală b, adică $y^{a,u^*}(T) = b$*. În plus,*

$$\int_0^T |u^*(s)|^2 ds \leq \int_0^T |u(s)|^2 ds,$$

pentru orice control $u \in \mathcal{U}$ *cu proprietatea că* $y^{a,u}(T) = b$*.*

Demonstraţie Matricea Q_T este simetrică. Să presupuem că estee nesingulară. Formula variaţiei constantelor ne dă

$$y^{a,u^*}(T) = S(T,0)a + \int_0^T S(T,s)B(s)B^*(s)S^*(T,s)Q_T^{-1}(S(T,0)a - b)ds =$$

$$= S(T,0)a + Q_T Q_T^{-1}(S(T,0)a - b) = b.$$

Deci sistemul este exact controlabil în timp T.

Reciproc, să presupunem că sistemul este aproximativ controlabil. Dacă $(Q_T\xi, \xi) = 0$, rezultă că $B^*(s)S^*(T,s)\xi \equiv 0$ pe $(0,T)$ şi din proprietatea de unică continuare rezultă că $\xi = 0$, deci matricea Q_T est nesingulară.

În cazul în care are loc controlabilitatea sistemului liniar, un calcul simplu ne arată că

$$\int_0^T |u^*|^2 ds = (Q_T^{-1}(S(T,0)a - b), (S(T,0)a - b))$$

Dacă u este alt control cu proprietatea că $y^{a,u}(T) = 0$ atunci

$$\int_0^T (u(s), u(s)^*)ds = -\int_0^T (S(T,s)B(s)u(s), Q_T^{-1}(S(T,0)a - b))ds =$$

$$= (Q_T^{-1}(S(T,0)a-b),(S(T,0)a-b)) = \int_0^T |u^*(s)|^2 ds.$$

De aici rezultă imediat că

$$\int_0^T |u(s)|^2 ds = \int_0^T |u(s)-u^*(s)|^2 ds + \int_0^T |u^*(s)|^2 ds \geq \int_0^T |u^*(s)|^2 ds.$$

■

Considerăm operatorul $\mathcal{K}_T : L^2(0,T,\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ dat de

$$\mathcal{K}_T(u) = \int_0^T S(T,s)B(s)u(s)ds.$$

Este clar că $X(T) = \text{Im } \mathcal{K}_T$. Considerăm în cele ce urmează că matricile A, B nu depind de t, deci $S(t,s) = e^{(t-s)A}$. Fie de asemenea $k_n : (\mathbb{R}^m)^n \to \mathbb{R}^n$ definit de

$$k_n(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} A^j B v_j, \quad v_j \in \mathbb{R}^m.$$

TEOREMA 3.1.3. *(Kalman) Im $\mathcal{K}_T$ = Im k_n. Sistemul liniar este controlabil dacă şi numai dacă rangul matricei $[A|B] := [B, AB, \ldots, A^{n-1}B] \in M_{n\times nm}$ este n. Matricea $[A|B]$ se mai numeşte matricea Kalman. Proprietatea de controlabilitate în timp T este echivalentă cu proprietatea de controlabilitate în orice timp.*

Demonstraţie Pentru ca Im $\mathcal{K}_T$ = Im k_n este suficient să arătăm că $v \perp \text{Im } \mathcal{K}_T \Leftrightarrow v \perp \text{Im } k_n$.

$v \perp \text{Im } \mathcal{K}_T$ dacă şi numai dacă, pentru orice $u \in L^2(0,T,\mathbb{R}^m)$,

$$0 = (v, \int_0^T S(T,s)Bu(s)ds)_{\mathbb{R}^m} = (B^*S^*(T,\cdot)v, u)_{L^2(0,T,\mathbb{R}^m)},$$

deci dacă şi numai dacă $B^*e^{(T-s)A^*}v \equiv 0, s \in (0,T)$. Facem $s = T$ şi calculăm primele $n-1$ derivate în $s = T$ şi obţinem că $B^*e^{(T-s)A^*}v \equiv 0$ implică $B^*v = B^*A^*v = \ldots = B^*(A^*)^{n-1}v = 0$. Reciproc, dacă $B^*v = B^*A^*v = \ldots = B^*(A^*)^{n-1}v = 0$ rezultă, folosind teorema lui Hamilton-Cayley, că $B^*(A^*)^m v = 0, \forall m \geq 0$. Deci, ţinând cont de dezvoltarea în serie de puteri a lui $e^{(T-s)A^*}$, rezultă că $B^*e^{(T-s)A^*}v \equiv 0$.

Pe de altă parte, $v \perp \text{Im } k_n$ dacă şi numai dacă $(v, A^jBw) = 0$ pentru $j = 0, \ldots, n-1$ şi pentru orice $w \in \mathbb{R}^m$, ceea ce este echivalent cu $B^*v = B^*A^*v = \ldots = B^*(A^*)^{n-1}v = 0$.

Controlabilitatea exactă în timp T are loc deci dacă şi numai dacă $B^*v = B^*A^*v = \ldots = B^*(A^*)^{n-1}v = 0$ implică $v = 0$. Aceasta înseamnă că rang $[A|B] = n$. ■

Clasificarea sistemelor liniare controlate.

Considerăm câte o schimbare de bază în spaţiul stărilor, respectiv în spaţiul controalelor: $z = Sy,\ v = Tu$ cu $S \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), T \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ matrici nesingulare. Sistemul liniar controlat (3.1) se transformă în sistemul $z' = A_1 z + B_1 v$ unde $A_1 = SAS^{-1},\ B_1 = SBT^{-1}$. Avem aici definită o relaţie de echivalenţă în mulţimea sistemelor liniare controlate, mai precis, spunem că *sistemele* (A, B) *şi* (A_1, B_1) *sunt echivalente* dacă există matricile nesingulare $S \in M_{n\times n}(\mathbb{R}),\ T \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ astfel încât $A_1 = SAS^{-1},\ B_1 = SBT^{-1}$.

Considerăm cazul $m = 1$ şi o pereche $(A, b), A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), b \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$

Teorema 3.1.4. *Presupunem că perechea* (A, b) *este controlabilă. Atunci sistemul corespunzător este echivalent cu ecuaţia controlată*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} \cdots a_n y = u,$$

unde $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = \det(\lambda I - A)$ *este polinomul caracteristic al matricei* A.

Demonstraţie Deoarece perechea (A, b) este controlabilă, rezultă că vectorii $b, Ab, \ldots A^{n-1}b$ sunt liniar independenţi. Construim vectorii $e_1, \ldots, e_n$ astfel:

$$\left\{ \begin{array}{l} e_n = b \\ e_{k-1} = Ae_k + a_{n-k+1}e_n,\ k = \overline{2, n} \end{array} \right. \tag{3.5}$$

Se verifică imediat că $(e_1, \ldots, e_n)$ sunt liniar independenţi şi că $Ae_1 = -a_n e_n$. Scriem sistemul în această bază şi concluzia este imediată. ■

Teorema 3.1.5. *(Teorema de descompunere a lui Kalman) Presupunem că rangul matricei lui Kalman* $[A|B]$ *este* $l < n$. *Există atunci o matrice nesingulară* $S \in M_n(\mathbb{R})$ *astfel încât*

$$SAS^{-1} = \left(\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{array} \right),\ SB = \left(\begin{array}{c} B_{11} \\ 0 \end{array} \right)$$

unde $A_{11} \in M_l(\mathbb{R}), B_{11} \in M_{l\times m}(\mathbb{R})$ *iar perechea* (A_{11}, B_{11}) *este controlabilă.*

Demonstraţie Ştim că $\operatorname{Im} \mathcal{K}_T = \operatorname{Im} k_n$ şi că $\dim \operatorname{Im} k_n = l$, rangul matricei $[A|B]$. Pe de altă parte, ţinând seama de teorema lui Hamilton-Cayley, $X(T) = \operatorname{Im} k_n$ este cel mai mic subspaţiu al lui $\mathbb{R}^n$ ce conţine $\operatorname{Im} B$ şi este invariant la A. Fie aşadar o bază $(f_1, \ldots, f_l)$ a lui $\operatorname{Im} k_n$ pe care o completăm la o bază a lui $\mathbb{R}^n$, obţinând astfel o bază $(f_1, \ldots, f_n)$. Fie S matricea acestei schimbări de bază. În noua bază, pentru $\xi = \left(\begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^n$,$\xi_1 \in \mathbb{R}^l$, are loc $\xi \in X(T) \Leftrightarrow \xi_2 = 0$. Notând cu $z = Sy, A_1 = SAS^{-1}$ şi cu $B_1 = SB$, sistemul devine:

$$z' = A_1 z + B_1 u.$$

Notăm $A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix}$ şi arătăm că $A_{21} = 0$, $B_{21} = 0$. Deoarece $X(T)$ este invariant la A, rezultă că $A_1 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ trebuie să aibă ultimele $n-l$ componente 0, deci $A_{21}\xi_1 = 0$. Cum ξ_1 este arbitrar rezultă că $A_{21} = 0$. Deoarece Im $B \subset X(T)$, trebuie ca $B_1 u$ să aibă ultimele $n-l$ componente 0 pentru orice $u \in \mathbb{R}^m$. Deci $B_{21}u = 0, \forall u$ şi obţinem $B_{21} = 0$. Pentru a arăta că perechea (A_{11}, B_{11}) este controlabilă observăm că:

$$l = \text{rang } [A|B] = \text{rang } S[A|B] = \text{rang } [A_1|B_1] = \text{rang } \begin{pmatrix} [A_{11}|B_{11}] \\ 0 \end{pmatrix},$$

deci rang $[A_{11}|B_{11}] = l$ şi perechea (A_{11}, B_{11}) este controlabilă. ■

3.2. Control optimal. Principiul de maxim al lui Pontriaghin

Considerăm problema de control optimal de tip Bolza:

$$\inf J(y^u, u), \quad J(y,u) = \int_0^T L(t, y(t), u(t))dt + l(y(T)), \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), u(t))) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Ne propunem să obţinem condiţii de optimalitate pe o cale asemănătoare celei urmate pentru a deduce ecuaţiile Euler-Lagrange.

Vom considera în cele ce urmează că f, L, l sunt funcţii de clasă C^1 în raport cu y, u şi L^∞_{loc} în ansamblul variabilelor. Notăm, pentru simplitate, $J(u) := J(y^u, u)$. Presupunem că există un control optimal u^*. Atunci prima variaţie a lui J în u^* este pozitivă:

$$\delta J(u^*)v = \frac{d}{d\lambda} J(u^* + \lambda v)|_{\lambda=0+} \geq 0$$

pentru orice $v \in \mathcal{U}$ cu proprietatea că $u^* + \lambda v \in \mathcal{U}$ când $0 < \lambda < \varepsilon$ suficient de mic. Notăm cu

$$z = \frac{d}{d\lambda}|_{\lambda=0} y^{u^*+\lambda v}$$

şi obţinem

$$0 \leq \int_0^T L_y(t, y^*, u^*)z + L_u(t, y^*, u^*)v dt + \nabla l(y(T)) \cdot z(T). \tag{3.8}$$

De asemenea, z verifică ecuaţia în variaţie (v. [**4**],[**35**]):

$$\begin{cases} z' = f_y(t, y^*, u^*)z + f_u(t, y^*, u^*)v \\ z(0) = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Să definim, ca şi în calculul variaţiilor, hamiltonianul depinzând de u

$$H^u(t, y, p) = (p, f(t, y, u)) - L(t, y, u) \tag{3.10}$$

Sistemul hamiltonian corepunzător este

$$\begin{cases} y' = f(t,y,u) \\ p' = -(p, f_y(t,y,u)\cdot) + L_y(t,y,u) = -f_y^*(t,y,u)p + L_y(t,y,u) \end{cases}$$

Se observă că prima ecuaţie, în y, este chiar ecuaţia (3.7). Considerăm p^* soluţia celei de a doua ecuaţii cu condiţia Cauchy în capătul final:

$$\begin{cases} p' = -f_y^*(t,y,u)p + L_y(t,y,u) \\ p(T) = -\nabla l(y(T)) \end{cases} . \tag{3.11}$$

Înmulţim (3.9) cu p^*, (3.11) cu z, adunăm ecuaţiile şi integrăm pe $(0,T)$. Obţinem:

$$-(\nabla l(y(T)), z) = \int_0^T (p^*, f_u(t,y^*,u^*)v) + (L_y(t,y^*,u^*), z)dt$$

egalitate care substituită în (3.8) ne dă

$$0 \leq \int_0^T (p^*, f_u(t,y^*,u^*)v) - (L_u(t,y^*,u^*), v)dt.$$

Cum $D_u H^{u^*}(t,y^*,p^*)v = (p^*, f_u(t,y^*,u^*)v) - (L_u(t,y^*,u^*), v)$, obţinem că $D_u H^{u^*}(t,y^*,p^*) \equiv 0, t \in [0,T]$. Dacă $f(t,y,u) = A(t)y + B(t)u$ iar L este convex în u (de exemplu $L(t,y,u) = (Qy,y) + (Ru,u)$ cu R matrice pozitiv definită), atunci H^u este concav în u şi se obţine imediat că

$$H^{u^*}(t,y^*(t),p^*(t)) = \max_{u \in U} H^u(t,y^*(t),p^*(t)). \tag{3.12}$$

Acesta este în esenţă conţinutul *principiului de maxim al lui Pontriaghin*. El este valabil în ipoteze mult mai generale asupra datelor problemei(v. [**13**],[**14**],[**6**]). Forma geometrică a acestuia, demonstraţia corespunzătoare şi formularea acestuia în cazul problemelor de alt tip (Lagrange,Mayer, timp liber etc.) vor fi prezentate în capitolul 6.

Principiul de maxim ne permite în anumite situaţii determinarea controlului optimal. Astfel, să notăm hamiltonianul maximizat cu

$$H_{max}(t,y,p) = \max_{u \in U} H^u(t,y,p)$$

şi să presupunem că acesta este de clasă C^1. Are loc $H_{max}(t,y^*,p^*) - H^{u^*}(t,y,p) \geq 0$ cu egalitate pentru $y = y^*, p = p^*$. Deci

$$\frac{\partial}{\partial y} H_{max}(t,y^*,p^*) = \frac{\partial}{\partial y} H^{u^*}(t,y^*,p^*),\ \frac{\partial}{\partial p} H_{max}(t,y^*,p^*) = \frac{\partial}{\partial p} H^{u^*}(t,y^*,p^*).$$

Problema se reduce aşadar la rezolvarea sistemului hamiltonian corespunzător hamiltonianului maximizat H_{max}, cu condiţiile la limită precizate. Controlul optimal se exprimă, folosind condiţia (3.12), în funcţie de (y^*,p^*).

3.3. Ecuaţia programării dinamice

Controlul optimal u^* determinat prin condiţiile de optimalitate (principiul de maxim al lui Pontriaghin) este un control cu buclă deschisă. Ca şi în cazul problemei de calculul variaţiilor, un alt mod de abordare este de a încadra problema într-o familie de probleme de control. Şi în cazul de faţă se va obţine o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul I, ecuaţia Hamilton-Jacobi-Bellman, sau ecuaţia programării dinamice. Rezolvarea acesteia ne dă o formulă a controlului optimal în formă feedback (control cu buclă închisă). Aceasta este *problema de sinteză* a controlului optimal.

Considerăm problema de control optimal (3.6), (3.7). O funcţie $K : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, măsurabilă Borel, se numeşte *control feedback* pentru sistemul (3.7), dacă pentru orice $(t_0, y_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, problema Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t), K(t, y(t))), \quad \text{a.p.t. } t \in (t_0, T) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right. \tag{3.13}$$

are cel puţin o soluţie $y \in C([0,T]; \mathbb{R}^n)$. Sistemul (3.13) se numeşte *sistem cu buclă închisă.*

Reprezentarea controlului optimal în formă feedback se numeşte *problema de sinteză* a controlului optimal. Funcţia K este numită si funcţia de sinteză pentru problema corespunzătoare de control optimal. Problema de sinteză este legată de o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul I, *ecuaţia Hamilton-Jacobi-Bellman*, sau *ecuaţia programării dinamice*:

(3.14)
$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_t(t,x) - \sup\limits_{u \in U} \{-(\varphi_x(t,x), f(t,x,u)) - L(t,x,u)\} = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \ t \in [0,T] \\ \varphi(T,x) = l(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{array} \right.$$

unde

$$\varphi_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Notând cu $H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hamiltonianul definit de:

$$H(t,x,p) = \sup_{u \in U} \{-(p, f(t,x,u)) - L(t,x,u)\}, \tag{3.15}$$

rescriem (3.14) în forma

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_t(t,x) - H(t,x,\varphi_x(t,x)) = 0 & t \in (0,T), x \in \mathbb{R}^n \\ \varphi(T,x) = l(x) & x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right. . \tag{3.16}$$

Introducem funcţia

$$\Phi(t,x) = \text{argsup}_{u \in U} \{-(\varphi_x(t,x), f(t,x,u)) - L(t,x,u)\}. \tag{3.17}$$

Fie $\psi : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funcţia valoare asociată problemei de control:

$$\psi(t,x) = \inf_u \Big\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_t^T L(s, y(s), u(s)) ds + l(y(T)), \\ y'(s) = f(s, y(s), u(s)), \ s \in (t,T), \ y(t) = x \end{array} \Big\} . \tag{3.18}$$

TEOREMA 3.3.1. *Fie $\varphi \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ soluţie a ecuaţiei Hamilton–Jacobi (3.16) cu condiţia Cauchy $\varphi(T,\cdot) = l(\cdot)$. Consideră Φ drept control feedback. Atunci*

$$\varphi(t,x) = \psi(t,x), \quad \forall (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n$$

şi Φ este un control feedback optimal.

Demonstraţie Fie (t,x) fixat şi fie y^t soluţia problemei

$$(y^t)' = f(s, y^t, \Phi(s, y^t(s))), \quad s \in (t,T),\ y^t(t) = x. \tag{3.19}$$

Are loc a.p.t $s \in (t,T)$:

$$\frac{d}{ds}\varphi(s, y^t(s)) = \varphi_s(s, y^t(s)) + (\varphi_y(s, y^t(s)), f(s, y^t(s), \Phi(s, y^t(s))) \tag{3.20}$$

Din (3.17) vedem că a.p.t $s \in (t,T)$:

$$\frac{d}{ds}\varphi(s, y^t(s)) = \varphi_s(s, y^t(s)) - H(s, y^t(s), \varphi_y(s, y^t(s)) - L(s, y^t(s), \Phi(s, y^t(s)).$$

De aici, folosind (3.16) obţinem:

$$\frac{d}{ds}\varphi(s, y^t(s)) = -L(s, y^t(s), \Phi(s, y^t(s)),$$

deci

$$\varphi(t,x) = \int_t^T L(s, y^t(s), \Phi(s, y^t(s))ds + l(y^t(T)) \geq \psi(t,x). \tag{3.21}$$

Dacă (y,v) este pereche admisibilă în problema (3.6), (3.7), are loc:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\varphi(s, y(s)) &= \varphi_s(s, y(s)) + (\varphi_x(s, y(s)), f(s, y(s), v(s))) \geq \\ &\geq \varphi_s(s, y(s)) - H(s, y(s), \varphi_x(s, y(s))) - L(s, y(s), v(s)),\end{aligned}$$

deci:

$$\frac{d}{ds}\varphi(s, y(s)) \geq -L(s, y(s), v(s)) \quad \text{a.e. } s \in (t,T)$$

şi astfel

$$\varphi(t,x) \leq \int_t^T L(s, y(s), v(s))ds + l(y(T)). \tag{3.22}$$

Întrucât (y,v) a fost arbitrar ales, din (3.21) şi (3.22) că $\varphi = \psi$. În plus, din (3.21) rezultă, făcând $t = 0$, obţinem că $u = \Phi(t, y(t))$ este un control feedback optimal. ■

OBSERVAŢIA 3.3.1. *Funcţia valoare ψ este, în condiţii de regularitate, soluţie clasică a ecuaţiei programării dinamice. Dacă ψ este numai continuă, atunci ea rămâne soluţie a ecuaţiei respective însă într-un sens generalizat şi anume este soluţie de vâscozitate (v.* [**18**],[**19**],[**20**],[**21**]*).*

OBSERVAŢIA 3.3.2. *Ecuaţia (3.16) este ecuaţia Hamilton-Jacobi (v §2.3) asociată sistemului hamiltonian cu hamiltonianul H_{max} obţinut în studiul principiului de maxim în §3.6.*

3.4. Problema regulatorului liniar-pătratic

Să ilustrăm ideile dezvoltate în paragrafele anterioare în cazul următoarei probleme Bolza pentru o ecuaţie liniară cu funcţională de cost pătratică:

(3.23)
$$\inf J(y^u, u), \quad J(y,u) = \frac{1}{2}\int_0^T (Q(t)y, y) + (R(t)u, u)dt + \frac{1}{2}(P_0 y(T), y(T)),$$

(3.24)
$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y + B(t)u + f(t) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

unde $A, Q \in L^\infty(0,T,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $P_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $R \in L^\infty(0,T,\mathcal{M}_m(\mathbb{R}))$, $B \in L^\infty(0,T,\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}))$, $R(t)$ pozitiv definită, $\forall t \in (0,T)$. Hamiltonianul sistemului este

$$H^u(t,y,p) = (p, A(t)y + B(t)u + b(t)) - \frac{1}{2}\left[(Q(t)y,y) + (R(t)u,u)\right].$$

Hamiltonianul H^u se maximizează pentru

(3.25)
$$u = R^{-1}B^*p$$

deci hamiltonianul maximizat este

(3.26)
$$H_{max}(t,y,p) = (p,Ay) + \frac{1}{2}(p, BR^{-1}B^*p) + (p,f) - \frac{1}{2}(Qy,y)$$

Pentru simplitatea scrierii am omis argumentul t; astfel, t intervine în H prin intermediul lui $A(t), B(t), R(t)$.

O cale de determinare a controlului optimal este principiul de maxim stabilit în §3.2. Dacă există un control optimal u^*, atunci determinarea acestuia se poate face rezolvând problema la limită pentru sistemul hamiltonian corespunzător lui H :

(3.27)
$$\begin{cases} y' = Ay + BR^{-1}B^*p + f & t \in (0,T) \\ p' = -A^*p + Qy & t \in (0,T) \\ y(0) = y_0, \quad p(T) = -P_0 y(T) & , \end{cases}$$

iar controlul optimal u^* se exprimă în funcţie de starea adjunctă p conform formulei (3.25)

Decuplarea sistemului hamiltonian (3.27) se poate face căutând pe p ca funcţie de y:

$$p(t) = -P(t)y(t) + r(t),$$

unde $P : [0,T] \to M_n(\mathbb{R})$ iar $r : [0,T] \to \mathbb{R}^n$. Problema la limită (3.27) este satisfăcută de y şi de p dat în forma de mai sus dacă $P(t)$, respectiv $r(t)$

satisfac următoarele două probleme Cauchy

$$\begin{cases} P' + PA + A^*P - PBR^{-1}B^*P + Q = 0 \\ \\ P(T) = P_0 \end{cases} \tag{3.28}$$

$$\begin{cases} r' = -(A^* - PBR^{-1}B^*)r - Pf \\ \\ r(T) = 0. \end{cases} \tag{3.29}$$

Ecuaţia (3.28) se numeşte *ecuaţia diferenţială Riccati* . Odată rezolvate aceste două probleme Cauchy, controlul optimal u^* se poate exprima în formă feedback

$$u^* = R^{-1}B^*p = R^{-1}B^*(-P(t)y + r(t)). \tag{3.30}$$

O altă abordare a problemei liniar pătratice este folosirea principiului programării dinamice al lui Bellman. Fie ψ funcţia valoare a problemei, definită ca în (3.18). Hamiltonianul definit în (3.15) verifică:

$$H(t, y, p) = H_{max}(t, y, -p)$$

iar $\Phi(t, x)$ definită în (3.17) este

$$\Phi(t, x) = -R^{-1}B^*\varphi_x$$

unde φ este soluţia ecuaţiei Hamilton-Jacobi-Bellman (3.16), care devine

$$\begin{cases} \varphi_t(t, x) - H_{max}(t, x, -\varphi_x(t, x)) = 0 \\ \\ \varphi(T, x) = \frac{1}{2}(P_0x, x) \end{cases} \tag{3.31}$$

Teorema 3.3.1 ne spune că dacă φ este soluţie de clasă C^1, atunci Φ defineşte controlul optimal în formă feedback $u(t) = \Phi(t, y(t))$. Căutăm soluţia φ de forma

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{2}(P(t)x, x) + (r(t), x) + b(t).$$

Introducem în (3.31) şi obţinem că φ este soluţie dacă P, r verifică (3.28), respectiv (3.29) iar b verifică

$$b' = \frac{1}{2}(B^*r, R^{-1}B^*r) - (r, f),\ b(T) = 0. \tag{3.32}$$

Observăm aici că dificultatea principală este rezolvarea problemei (3.28), care conţine o neliniaritate pătratică. Problemele (3.29) şi (3.32) sunt liniare şi nu prezintă dificultăţi din punct de vedere teoretic: odată determinat P, se determină r şi apoi b.

Teorema 3.4.1. *Presupunem că $Q(t), t \in [0, T], P_0$ sunt matrici simetrice şi pozitive, iar $R(t)$ este uniform pozitiv definită, adică există $\alpha > 0$ astfel încât:*

$$(Rx, x) \geq \alpha\|x\|^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

Atunci:

i) Ecuaţia Riccati (3.28) are soluţie unică P pe $[0,T]$, pozitivă şi simetrică.

ii) Problema liniar pătratică (3.23), (3.24) admite o unică soluţie.

Demonstraţie Fie $S(t) := P(T-t)$. Avem de demonstrat existenţa soluţiei pe intervalul $[0,T]$ pentru problema

$$\begin{cases} S' = SA + A^*S - SBR^{-1}B^*S + Q, \ t \in [0,T] \\ \\ S(0) = P_0 \end{cases} \tag{3.33}$$

Teorema de existenţă locală pentru problema Cauchy ne spune că există o unică soluţie S, definită pe un interval maximal $[0,T_1)$. Întrucât S^* este de asemenea soluţie, rezultă că $S = S^*$. Înlcuim P_0 cu $P_0 + \varepsilon I$, Q cu $Q + \varepsilon I$ şi arătăm că soluţia problemei rămâne pozitiv definită şi are ca interval de existenţă $[0,T]$. Făcând pe $\varepsilon \to 0$, obţinem existenţa globală a soluţiei şi pozitivitatea acesteia.

Presupunem aşadar că P_0 şi $Q(t)$ sunt pozitiv definite. Soluţia S este local pozitiv definită. Pentru $x \in \mathbb{R}^n$ are loc

$$\frac{d}{dt}(S(t)x,x) = 2(Ax,Sx) - (R^{-1}B^*Sx, B^*Sx) + (Qx,x).$$

Dacă am presupune că pentru un $\bar{t} > 0$ şi un $x \in \mathbb{R}^n$ are loc $(S(\bar{t})x,x) = 0$ şi acest $\bar{t}$ este primul pentru care S nu mai rămâne pozitiv definită, am obţine că

$$\frac{d}{dt}(S(t)x,x)_{t=\bar{t}} = (Qx,x) > 0.$$

Aceasta contrazice faptul că, pentru $t < \bar{t}$, $S(t)$ este pozitiv definită. Deci soluţia rămâne pozitiv definită pe întreg intervalul de existenţă.

Pentru $0 \le t \le T'$, cu $0 < T' < T_1$, funcţia $\psi(t,x) = \frac{1}{2}(S(T'-t)x,x)$ este funcţia valoare pentru problema de control optimal (3.23),(3.24) (v. (3.18)) pe intervalul $[t,T']$, cu $f = 0$. Rezultă că ψ se poate majora cu valoarea funcţionalei calculată pe soluţia corespunzătoare lui $u = 0$ şi care verifică $y(t) = x$; această soluţie este $y(s) = e^{(s-t)A}x$ şi deci

$$(S(T'-t)x,x) \le$$

$$\le \int_t^{T'} (Qe^{(s-t)A}x, e^{(s-t)A}x)ds + (P_0e^{(T'-t)A}x, e^{(T'-t)A}x) \le C(T)\|x\|^2.$$

Obţinem aşadar că $S(t)$ este mărginită în normă pe intervalul $[0,T_1)$ şi deci $T_1 = T$. În consecinţă $P(t)$, soluţia ecuaţiei diferenţiale Riccati (3.28) este pozitivă şi definită pe întreg intervalul închis $[0,T]$.

Existenţa soluţiei problemei de control liniar pătratic rezultă din teorema 3.3.1 deoarece există o soluţie C^1 a ecuaţiei Hamilton-Jacobi-Bellman, exprimată cu ajutorul soluţiei ecuaţiei diferenţiale Riccati. Unicitatea soluţiei rezultă de asemenea din reprezentarea controlului optimal în funcţie de starea adjunctă p (3.25), care la rândul său se exprimă în mod unic cu

ajutorul soluţiei ecuaţiei Riccati (folosind evident şi soluţiile unice ale problemelor (3.29), (3.32)).

De altfel, se poate observa că problema de control optimal considerată este o problemă de optimizare pentru o funcţională strict convexă şi coercivă (R este uniform pozitiv definită şi Q este pozitivă) pe o mulţime convexă şi închisă. ■

3.5. Stabilizarea sistemelor diferenţiale liniare

Considerăm sistemul liniar controlat

$$y' = Ay + Bu \tag{3.34}$$

unde $A \in M_n(\mathbb{R}), B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Se pune problema de a determina un control în formă feedback $u = Ky, K \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ astfel încât sistemul liniar obţinut

$$y' = (A + BK)y \tag{3.35}$$

să fie asimptotic stabil . Astfel, vom spune că *sistemul* (3.34) *este stabilizabil* (sau perechea(A, B) este stabilizabilă) dacă există un feedback K astfel încât toate soluţiile sistemului (3.35) tind la 0 pentru $t \to +\infty$, altfel spus, există K astfel încât $\sigma(A + BK) \subset (-\infty, 0)$ unde $\sigma(A)$ reprezintă spectrul, sau mulţimea autovalorilor matricii A..

Vom spune că *sistemul* (3.34) *este complet stabilizabil* (sau perechea(A, B) este complet stabilizabilă) dacă pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$ există un feedback K astfel încât $\sigma(A + BK) \subset (-\infty, \omega)$.

Teorema 3.5.1. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) Perechea (A, B) este complet stabilizabilă.

ii) Perechea (A, B) este controlabilă.

iii) Pentru orice polinom de grad n, $p(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n$, există un feddback K astfel încât polinomul caracteristic al lui $A + BK$ să fie $p_{A+BK} = p$

Demonstraţie *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Presupunem prin reducere la absurd că perechea (A, B) nu ar fi controlabilă. . Din teorema de descompunere a lui Kalman 3.1.5, rezultă că $(A, B) \sim (A_1, B_1)$ cu $A_{21} = 0, B_{21} = 0$. Considerăm acum un feedback $K = (K_1, K_2)$, $K_1 \in M_{m\times l}, K_2 \in M_{m\times(n-l)}$. Polinomul caracteristic al lui $A_1 + B_1K$ este $p_{A_1+B_1K} = p_{A_{11}+B_{11}K_1} \cdot p_{A_{22}}$. Deci întotdeauna, pentru orice K, $p_{A_{22}} | p_{A_1+B_1K}$ ceea ce contrazice *i)*.

ii) $\Rightarrow$ *iii)*. Pentru început considerăm cazul $m = 1$. Deoarece sistemul este controlabil, el este echivalent cu ecuaţia de ordinul n controlată

$$z^{(n)} + a_1z^{(n-1)} + \cdots + a_nz = u$$

şi feedbackul care realizează cerinţele punctului iii) este $u = (a_1-\alpha_1)z^{(n-1)} + \cdots + (a_n - \alpha_n)z$.

Pentru a demonstra *iii)* în cazul general este suficient să arătăm că există $v \in \mathbb{R}^m$ (vector coloană) şi $L \in M_{m\times n}$, astfel încât perechea $(A + BL, Bv)$

este controlabilă. În acest fel se reduce demonstraţia la cazul $m = 1$ şi feedbackul căutat este $L + vK$, unde $K \in M_{1\times n}$ este feedbackul corespunzător cazului $m = 1$ şi perechii $(A + BL, Bv)$.

Alegem aşadar $v \in \mathbb{R}^m$ astfel încât $Bv \neq 0$. Construim o bază în $\mathbb{R}^n$ în felul următor: $f_1 = Bv$, $f_{i+1} = Af_i + Bu_i$, pentru un $u_i \in \mathbb{R}^m, i = 1, \ldots, n$. Presupunem că am construit $f_1, \ldots, f_l$ şi căutăm $u_l \in \mathbb{R}^m$ astfel încât $f_{l+1} = Af_l + Bu_l$ să nu aparţină spaţiului $X_l = \text{span}\,\{f_1, \ldots, f_l\}$. Dacă aceasta nu este posibil, înseamnă că $Af_l + Bu \in X_l, \forall u \in \mathbb{R}^m$, deci $Af_l \in X_l$ şi $Bu \in X_l, \forall u \in \mathbb{R}^m$. Rezultă imediat că $\text{Im}\, B \subset X_l$ şi X_l este subspaţiu invariant al lui A. Deci $E_T \subset X_l$ şi deci $X_l = \mathbb{R}^n$ şi $l = n$ (din controlabilitate).

iii) $\Rightarrow$ *i)*. Implicaţia aceasta este imediată. ■

Stabilizarea feedback a sistemului liniar (3.34) este intim legată de problema de minimizare

$$\inf J(y^u, u),\ J(y,u) = \int_0^\infty (Qy, y) + (Ru, u)dt \tag{3.36}$$

unde y^u verifică (3.34) cu $y^u(0) = x$, cu Q, R matrici pozitiv definite fixate. Această problemă de control cu orizont infinit ne va conduce la o *ecuaţie Riccati algebrică* :

$$SA + A^*S - SBR^{-1}B^*S + Q = 0 \tag{3.37}$$

unde necunoscuta este $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pe care o căutăm în mulţimea matricilor simetrice pozitive. Vom vedea în cele ce urmează că stabilizabilitatea feedback a sistemului (3.34) este echivalentă cu existenţa unei astfel de soluţii pentru ecuaţia (3.37).

Lema 3.5.1. *Fie S_1, S_2 două soluţii simetrice ale ecuaţiei diferenţiale Riccati 3.33) cu $S_1(0) \leq S_2(0)$ (i.e. $S_2(0) - S_1(0)$ este pozitivă) atunci $S_1(t) \leq S_2(t)$ pentru $t > 0$.*

Demonstraţie Fie $S = S_1 - S_2$. Acesta verifică ecuaţia

$$S' = SA + A^*S - S_2BR^{-1}B^*S + S_1BR^{-1}B^*S - SBR^{-1}B^*S$$

Acelaşi argument din demonstraţia teoremei 3.4.1 folosit pentru a arăta pozitivitatea lui P funcţionează şi aici. Se face mai întâi demonstraţia înlocuind pe $S_2(0)$ cu $S_2(0) + \varepsilon I$, astfel încât $S(0)$ este pozitiv definită, iar pe S_2 îl considerăm soluţia ecuaţiei perturbate cu εI $(Q \to Q + \varepsilon I)$. În această situaţie S verifică

$$S' = SA + A^*S - S_2BR^{-1}B^*S + S_1BR^{-1}B^*S - SBR^{-1}B^*S + \varepsilon I$$

Dacă $\bar{t}$ este primul punct pentru care S nu mai este pozitiv definită, rezultă că, pentru x vector propriu al lui $S(\bar{t})$ corespunzător valorii proprii 0, are loc

$$\frac{d}{dt}(S(t)x, x)|_{t=\bar{t}} = \|x\|^2 > 0$$

ceea ce conduce la o contradicţie. Rezultatul final se obţine trecând la limită pentru $\varepsilon \to 0$.

Legătura dintre stabilizare şi existenţa soluţiilor pentru ecuaţia Riccati algebrică este dată de următoarea teoremă:

TEOREMA 3.5.2. *i) Dacă perechea (A, B) este stabilizabilă, atunci ecuaţia Riccati algebrică (3.37) are cel puţin o soluţie simetrică şi pozitivă*

ii)Dacă ecuaţia Riccati algebrică (3.37) are o soluţie S simetrică şi pozitivă, atunci aceasta are şi o soluţie simetrică şi pozitivă $\underline{S}$, minimală (i.e. orice altă soluţie simetrică şi pozitivă S verifică $\underline{S} \leq S$). În plus controlul feedback

$$u^*(t) = -R^{-1}B^*\underline{S}y(t) \tag{3.38}$$

este control optimal pentru problema (3.36), (3.34). Are loc

$$J(y^{u^*}, u^*) = (\underline{S}x, x) \tag{3.39}$$

Dacă în plus Q este pozitiv definită, atunci matricea $A - BR^{-1}B^*\underline{S}$ este stabilă, altfel spus feedbackul construit este stabilizant.

Demonstraţie Fie $\underline{S}(t)$ soluţia ecuaţiei diferenţiale Riccati (3.33) cu condiţia iniţială $\underline{S}(0) = 0$. Deoarece $\underline{S}(t) \geq 0$ pentru $t \geq 0$, iar pentru $\delta > 0$ $\underline{S}(\cdot + \delta)$ este soluţie care în 0 ia valoarea $\underline{S}(\delta)$, rezultă din lema 3.5.1 că $t \to \underline{S}(t)$ este crescătoare.

i) Să presupunem că perechea (A, B) este stabilizabilă. Atunci există un feedback K astfel încât $A + BK$ este matrice stabilă. Se poate observa cu uşurinţă că $(\underline{S}(t)x, x)$ este funcţia valoare pentru problema de control optimal de tip Bolza pe intervalul $(0, t)$ cu funcţionala de cost

$$J^t(y, u) = \int_0^t (Qy, y) + (Ru, u)ds.$$

Deci dacă alegem $y = \exp(t(A + BK))x$ şi $u(t) = Ky(t)$ obţinem

$$(\underline{S}(t)x, x) \leq J^t(y, u) \leq J(y, u) < +\infty.$$

$(\underline{S}(t)x, x)$ este o funţie monoton crescătoare şi mărginită deci convergentă. Limita sa defineşte o formă pătratică pe $\mathbb{R}^n$ a cărei matrice o notăm tot cu $\underline{S} = \lim_{t\to+\infty} \underline{S}(t)$. De asemenea, rezultă că există $l = \lim_{t\to+\infty} \underline{S}'(t)$ de unde $l = 0_n$ (dacă o funcţie scalară împreună cu derivata sa au limite finite la $+\infty$ atunci limita derivatei este 0; aplicăm acest rezultat componentelor matricii S).

ii) Fie acum S o soluţie simetrică şi pozitivă a ecuaţiei (3.37). Lema 3.5.1 ne spune că $\underline{S}(t) \leq S$ deci există $\underline{S} = \lim_{t\to+\infty} \underline{S}(t)$ soluţie pentru (3.37) care satisface $\underline{S} \leq S$. Rezultă că $\underline{S}$ este soluţie minimală. Pe de altă parte, $\underline{S}$ este soluţie şi a ecuaţiei diferenţiale Riccati, deci feedbackul furnizat de aceasta prin (3.38) satisface

$$(\underline{S}x, x) = \int_0^T (Qy^*, y^*) + (Ru, u^*)ds + (\underline{S}y^*(T), y^*(T))$$

de unde

$$\int_0^T (Qy^*, y^*) + (Ru, u^*)ds \leq (\underline{S}x, x)$$

şi deci $J(y^*, u^*) \leq (\underline{S}x, x)$. Pe de altă parte

$$(\underline{S}(T)x, x) \leq \int_0^T (Qy^*, y^*) + (Ru, u^*)ds \leq J(y^*, u^*),$$

de unde rezultă şi inegalitatea inversă şi, în consecinţă, egalitatea (3.39).

Fie ecuaţia

$$y' = Ay - BR^{-1}B^*\underline{S}y$$

pe care o înmulţim scalar cu $\underline{S}y$. Obţinem, făcând uz de ecuaţia Riccati algebrică, că

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\underline{S}y(t), y(t)) = -\frac{1}{2}(R^{-1}B^*\underline{S}y(t), B^*\underline{S}y) - (Qy(t), y(t)) \leq -(Qy(t), y(t)).$$

Deoarece Q este matrice pozitiv definită, rezultă că $\underline{S}$ este pozitiv definită deci $\sqrt{(Qy, y)}$, $\sqrt{(\underline{S}y, y)}$ definesc norme echivalente pe $\mathbb{R}^n$. Rezultă că există $C, \delta > 0$ astfel încât $|y(t)| \leq Ce^{-\delta t}|y_0|$. Aşadar matricea $A - BR^{-1}\underline{S}$ este stabilă. ■

3.6. Problema de timp optimal pentru sisteme liniare

Considerăm U un poliedru din $\mathbb{R}^m$:

$$U = \text{conv}(a_1, \ldots, a_d)$$

iar $\{a_j, j = 1, \ldots, d\}$ este o mulţime minimală ce generează pe U. a_j sunt vârfurile poliedrului. Considerăm $\mathcal{U} = \{u : [0, \infty) \to U : u \text{ măsurabilă}\}$, mulţimea controalelor admisibile pentru problema liniară

$$y' = Ay + Bu,\ y(0) = y_0, \tag{3.40}$$

unde A, B sunt matrici constante. Ne propunem în acest paragraf să studiem problema de timp optimal. Dat $y_1 \in \mathcal{A}(y_)$ să se determine $u^* \in \mathcal{U}$ care realizează infimul

$$\inf\{t : \exists u \in \mathcal{U}, y^u(t) = y_1\}, \tag{3.41}$$

unde am notat, ca de obicei, cu y^u soluţia lui (3.40) pentru un $u \in \mathcal{U}$ dat. Timpul optimal îl vom nota cu t^* iar controlul corespunzător cu u^*.

Problema de timp optimal este o problemă de control optimal cu lagrangean $L \equiv 1$ şi timp final liber. Vom da o caracterizare a controlului optimal în problema de timp optimal. Facem apel la principiul de maxim pentru probema de timp optimal şi pe care îl vom demonstra în §6.3. Astfel, hamiltonianul sistemului este

$$H^u(t, y, p) = (p, Ay + Bu) + \nu.$$

cu $\nu \in \{-1, 0\}$. Sistemul hamiltonian este

$$\begin{cases} y' = Ay + Bu \\ p' = -A^*p \\ y(0) = y_0, y(t^*) = y_1. \end{cases} \tag{3.42}$$

Ca şi în cazul timpului final fixat pentru problema Bolza, se obţine că dacă u^* este control optimal, atunci există o soluţie (y^*, p^*), cu $(\nu, p^*) \neq (0, 0)$ astfel încât are loc proprietatea de maxim (3.12). În plus faţă de cazul timpului final liber, după cum se va demonstra în §6.3, are loc

$$H_{max} \equiv 0.$$

Astfel, notând cu

$$h^u(y, p) = (p, Ay + Bu),$$

obţinem că există un arc dual p^* netrivial astfel încât are loc $h^{u^*}(y^*, p^*) = \max_{u \in U} h^u(y^*, p^*)$. Faptul că p^* este netrivial rezultă din

$$H_{max}(y^*, p^*) = h^{u^*}(y^*, p^*) + \nu \equiv 0$$

şi $(\nu, p^*) \neq (0, 0)$.

Teorema 3.6.1. *i) Problema de timp optimal (3.40),(3.41) are cel puţin o soluţie.*

ii) Dacă în plus, notând cu $l_{ij} = a_j - a_i$, are loc pentru $\forall i, j$

$$rang\ [A|Bl_{ij}] = n, \tag{3.43}$$

atunci soluţia este unică.

iii) În ipotezele de mai sus rezultă că există o mulţime finită de puncte $\mathcal{T} \subset [0, t^*]$ cu proprietatea că, pentru $t \in [0, t^*] \setminus \mathcal{T}$, $u(t) \in \{a_1, \ldots, a_d\}$ şi u este local constantă.

Demonstraţie Formula variaţiei constantelor ne dă

$$y^u(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

Dearece u ia valori într-o mulţime mărginită U, rezultă că pentru un $\delta > 0$ şi $0 < s < \delta$, $\|e^{(t-s)A}Bu(s)\| \leq C(\delta)$. Deci pentru $0 < t < \delta$:

$$\|y^u(t) - y_0\| \leq \|e^{tA} - I\|\|y_0\| + C(\delta)t$$

Rezultă că pentru t suficient de mic $\|y^u(t) - y_0\| < \|y_1 - y_0\|$ deci $t^* > 0$. Considerăm şirurile t_n, u_n, $t_n \to t^*$ $y^{u_n}(t_n) = y_1$. Deoarece U este mărginită rezultă că u_n formează un şir mărginit în $L^2(0, t^*, \mathbb{R}^m)$ şi $u_n \rightharpoonup u^*$ slab. Rezultă că

$$\int_0^{t^*} e^{(t_n-s)A}Bu(s)ds \to \int_0^{t^*} e^{(t^*-s)A}Bu^*(s)ds,$$

deci u^* este control optimal.

Demonstrăm acum unicitatea controlului optimal. Presupunem că ar exista două controale optimale u^*, v^*. Din formula variaţiei constantelor deducem:

$$y_1 = e^{t^*A}y_0 + \int_0^{t^*} e^{(t^*-s)A}Bu^*(s)ds = e^{t^*A}y_0 + \int_0^{t^*} e^{(t^*-s)A}Bv^*(s)ds,$$

de unde

$$\int_0^{t^*} e^{-sA}Bu^*(s)ds = \int_0^{t^*} e^{-sA}Bv^*(s)ds. \tag{3.44}$$

Fie p^* starea duală corespunzătoare controlului optimal u^*, $p^*(t) = e^{-tA^*}\xi$ cu $\xi \neq 0$. Maximul

$$\max_{u\in U}(p^*(t), Ay^*(t) + Bu)$$

se atinge măcar în unul dintre vârfurile a_i. Înmulţim scalar (3.44) cu ξ şi obţinem că:

$$\int_0^{t^*} (p^*(s), Bu^*(s))ds = \int_0^{t^*} (p^*(s), Bv^*(s))ds.$$

Condiţia de maxim ne spune că

$$(p^*(s), Bu^*(s)) = (p^*(s), Bv^*(s)),\ a.p.t. \quad s \in [0, t^*]. \tag{3.45}$$

Arătăm că, pentru $t \in [0, t^*]$ cu excepţia unui număr finit de puncte $\{t_j : j = 1, \ldots, m\}$, acest maxim este atins într-un singur element din U care este vârf al poliedrului (prima parte din *iii*)). Aceste puncte le vom numi *puncte de comutare*. Presupunem că ar exista o infinitate de puncte $t_k \in [0, t^*]$ pentru care maximul ar fi atins în mai mult de un vârf. Cum numărul vârfurilor este finit, există două vârfuri a_i, a_j în care maximul se atinge pe un subşir pe care îl notăm tot cu t_k. Deci

$$(p(t_k), Ba_i) = (p(t_k), Ba_j),$$

de unde

$$(p(t_k), Bl_{ij}) = (e^{-t_kA^*}\xi, Bl_{ij}) = 0.$$

Cum funţia $t \to (p(t), Bl_{ij})$ este analitică şi are o infinitate de zerouri în $[t_0, t^*]$, rezultă că $(p(t), Bl_{ij}) \equiv 0$. Derivând de $n-1$ ori în $t = 0$ obţinem

$$(\xi, Bl_{ij}) = (\xi, ABl_{ij}) = \ldots = (\xi, A^{n-1}Bl_{ij}) = 0$$

de unde, ţinând cont de condiţia 3.43, rezultă $\xi = 0$, contradicţie. Obţinem aşadar din (3.45) că $u^* = v^*$ aproape peste tot.

Din punctul *iii*) a mai rămas de demonstrat că pe $[0, t^*] \setminus \mathcal{T}$, u este local constantă. Aceasta rezultă imediat din continuitatea funcţiei $t \to (e^{-tA^*}\xi, Bu)$.

Acest rezultat se mai întâlneşte în literatură sub numele de *teoremă de bang-bang* . ■

CAPITOLUL 4

Reprezentarea ecuaţiilor diferenţiale pe varietăţi diferenţiabile

4.1. Ecuaţii diferenţiale pe varietăţi diferenţiabile

În cele ce urmează M este o varietate diferenţiabilă n-dimensională şi $TM = \cup_{q\in M} T_qM$ este fibratul tangent.

Considerăm un *câmp vectorial neautonom* f^t pe M, adică $f^t(q) \in T_qM$ pentru orice $q \in M, t \in \mathbb{R}$.

Considerăm problema Cauchy pentru ecuaţia diferenţială neautonomă:

$$\begin{cases} \dot{q} = f^t(q) := f(t,q) \\ q(0) = q_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Fie $M = \Omega \subset \mathbb{R}^n$ submulţime deschisă; are loc următoarea teoremă a lui Carathéodory (v. [**16**], teorema 1.1, cap.2):

TEOREMA 4.1.1. *Dacă $f = f(t,y)$ este măsurabilă în t pentru orice y şi continuă în y a.p.t. t şi există o funcţie $m_0 \in L^1(\mathbb{R})$ astfel încât într-o vecinătate a lui $(0, y_0)$*

$$|f(t,y)| \le m_0(t),$$

atunci problema

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{4.2}$$

are o soluţie locală unică care este o funcţie absolut continuă, verifică ecuaţia a.p.t şi condiţia iniţială.

Dacă pentru t fixat , $f_i(t,\cdot)$ este C^1 şi pentru orice $(\overline{t}, \overline{y})$ există o funcţie $m_1 \in L^1$ şi o vecinătate $\mathcal{V}$ a lui $(\overline{t}, \overline{y})$ astfel încât pentru orice $(t,y) \in \mathcal{V}$

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t,y)\right| \le m_1(t),$$

atunci soluţia este unică. În plus soluţia este C^1 în raport cu datele iniţiale.

În cazul în care M este varietate diferenţiabilă, pentru a rezolva ecuaţia (4.1), o reprezentăm în coordonate locale. Fie $\varphi : \mathcal{V}(q_0) \subset M \to \mathcal{V}(y_0) \subset \mathbb{R}^n$, o hartă locală. În aceste coordonate câmpul vectorial f^t se reprezintă ca:

$$(\varphi_* f^t)(x) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i(t,x) e_i = \tilde{f}(t,y).$$

unde e_i sunt vectorii bazei canonice, iar φ_* este aplicaţia liniară tangentă sau diferenţiala lui φ. A rezolva (local) problema Cauchy (4.1) este echivalent cu a rezolva în harta locală următoarea problemă Cauchy:

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = \tilde{f}(t, y) \\ y(0) = y_0. \end{array} \right. \tag{4.3}$$

Existenţa şi unicitatea soluţiei locale pentru (4.3) este asigurată dacă $\widetilde{f}$ verifică ipotezele teoremei 4.1.1; acestea sunt ipoteze asupra lui f întrucât nu depinde de alegerea hărţii locale. În aceste ipoteze teorema lui Carathéodory ne asigură că problema (4.3) are o soluţie locală $y(t, y_0)$ care este absolut continuă în raport cu t, C^1 în raport cu datele iniţiale y_0 şi satisface ecuaţia a.p.t.. Soluţia problemei (4.1) este $q(t, q_0) = \varphi^{-1}(y(t, y_0))$ şi aceasta nu depinde de harta locală aleasă.

Soluţia problemei Cauchy (4.1) este definită pe un interval maximal. Vom presupune în cele ce urmează că intervalul maximal de definiţie este $\mathbb{R}$ pentru toate datele iniţiale. Un câmp vectorial ce determină soluţii globale pentru problema Cauchy asociată se numeşte *câmp vectorial complet*. Pe o varietate compactă orice câmp vectorial neted este complet.

Notăm cu F^t *fluxul* definit de ecuaţia (4.1):

$$F^t(q_0) = q(t, q_0).$$

Atunci $F^t \in \text{Diff}\,(M)$, mulţimea difeomorfismelor varietăţii M, şi ecuaţia (4.1) se rescrie

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt} F^t(q) = f^t \circ F^t(q), \quad q \in M \\ \\ F^0 = \text{Id}. \end{array} \right. \tag{4.4}$$

unde Id este aplicaţia identitate pe M.

Aşadar, în cele ce urmează, presupunem satisfăcute următoarele ipoteze:

- M este o varietate diferenţială de clasă C^∞, iar $\text{Diff}\,(M)$ desemnează mulţimea C^∞-difeomorfismelor lui M.
- Câmpul vectorial neautonom f^t este complet şi în orice hartă locală $\widetilde{f}(t, y)$ este măsurabilă în raport cu t pentru x fixat şi C^∞ în raport cu x pentru a.p.t. t.
- Există funcţiile local integrabile $m_k(t)$ astfel încât local

$$|D_x^k \widetilde{f}(t, y)| \leq m_k(t).$$

Aceste ipoteze ne asigură că problema Cauchy (4.1) are soluţie unică ce depinde C^∞ de datele iniţiale.

4.2. Reprezentarea exponenţială a fluxurilor

Calculul operatorial, introdus de A. Agrachev şi R. Gamkrelidze (v. [**1**],[**26**], [**2**]) şi numit reprezentare exponenţială a fluxurilor sau calcul cronologic, este un instrument deosebit de util care permite înlocuirea obiectelor neliniare (varietăţi diferenţiabile, vectori tangenţi, fluxuri, difeomorfisme) cu obiecte liniare şi anume funcţionale sau operatori pe algebra $C^\infty(M)$ a funcţiilor reale, infinit diferenţiabile definite pe M.

Punctele se reprezintă ca morfisme de algebre de la $C^\infty(M)$ în $\mathbb{R}$. Dacă $q \in M$, atunci acesta defineşte un morfism de algebre $\widehat{q} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$,

$$\widehat{q}(\alpha) = \alpha(q).$$

Se poate arăta că pentru orice morfism de algebre $\psi : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, există un unic $q \in M$ astfel încât $\psi = \widehat{q}$ (v. [**2**]).

Difeomorfismele varietăţii M se reprezintă ca automorfisme ale algebrei $C^\infty(M)$. Dacă $F \in \text{Diff}\ (M)$, definim $\widehat{F} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ prin

$$\widehat{F}(\alpha) = \alpha \circ F.$$

În general, dacă $F : M \to N$ este o aplicaţie netedă între două varietăţi, atunci ea defineşte un morfism de algebre $\widehat{F} : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ prin $\widehat{F}(\beta) = \beta \circ F$ unde $\beta \in C^\infty(N)$. Se observă că dacă $F, G \in \text{Diff}\ (M)$ atunci $\widehat{F \circ G} = \widehat{G} \circ \widehat{F}$.

Vectori tangenţi. Fie $f \in T_qM$. Atunci f poate fi privit fie ca vector tangent în q al unei curbe ce tece prin q, fie ca derivată direcţională, sau derivată Lie, a funcţiilor în punctul q şi în direcţia f. Aşadar, din primul punct de vedere se consideră o curbă netedă $q(t)$, $q(0) = q$, $\dot{q}(0) = f$. Al doilea punct de vedere este de a considera derivata Lie $L_f\alpha = \dfrac{d}{dt}\alpha(q(t)) \mid_{t=0}$. Se defineşte aşadar $\widehat{f} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$,

$$\widehat{f}(\alpha) := \frac{d}{dt}[\widehat{y}(t)(\alpha)] \mid_{t=0} = L_f\alpha.$$

$\widehat{f}$ este funcţională liniară pe $C^\infty(M)$ şi satisface regula lui Leibniz

$$\widehat{f}(\alpha\beta) = \alpha(y)\widehat{f}(\beta) + \widehat{f}(\alpha)\beta(y). \tag{4.5}$$

Orice funcţională liniară pe $C^\infty(M)$ ce satisface (4.5) corespunde unui unic vector tangent.

Câmpuri vectoriale. Fie $\text{Vec}\ (M)$ mulţimea câmpurior vectoriale netede pe M şi fie $f \in \text{Vec}\ (M)$. Atunci f defineşte un operator liniar $\widehat{f} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$,

$$\widehat{f}(\alpha)(y) = \widehat{f(y)}(\alpha).$$

Acest operator satisface regula lui Leibniz:

$$\widehat{f}(\alpha\beta) = \alpha\widehat{f}(\beta) + \widehat{f}(\alpha)\beta. \tag{4.6}$$

Orice operator liniar pe $C^\infty(M)$ ce satisface (4.6) se numeşte *derivare* şi corespunde unui unic câmp vectorial.

Comportarea vectorilor tangenţi şi a câmpurilor vectoriale sub acţiunea difeomorfismelor.

Fie $F \in \text{Diff}\ (M)$ şi $g \in T_qM$ astfel încât $g = \dfrac{d}{dt}q(t)\mid_{t=0}$. Atunci se defineşte $F_*g \in T_{F(q)}M$ prin $F_*g = \dfrac{d}{dt}F(q(t))\mid_{t=0}$. Astfel, dacă $\alpha \in C^\infty(M)$, atunci $\widehat{F_*g}(\alpha) = \dfrac{d}{dt}\widehat{F(q(t))}(\alpha)\mid_{t=0} = \dfrac{d}{dt}\alpha(F(q(t)))\mid_{t=0} = \widehat{g}(\alpha\circ F) = \widehat{g}\circ\widehat{F}(\alpha)$. Deci,

$$\widehat{F_*g} = \widehat{g}\circ\widehat{F}. \tag{4.7}$$

În acelaşi mod, dacă $g \in \text{Vec}\ (M)$, întrucât $\widehat{g(q)} = \widehat{q}\circ\widehat{g}$ rezultă că $F_*\widehat{g(F(q))} = \widehat{F(q)}\circ\widehat{F_*g} = \widehat{q}\circ\widehat{F}\circ\widehat{F_*g}$. Pe de altă parte, $F_*\widehat{g(F(q))} = \widehat{F_*(g(q))} = \widehat{q}\circ\widehat{g}\circ\widehat{F}$. Cum q este arbitrar, $\widehat{F}\circ\widehat{F_*g} = \widehat{g}\circ\widehat{F}$ deci

$$\widehat{F_*g} = \widehat{F}^{-1}\circ\widehat{g}\circ\widehat{F} = \text{Ad}\ \widehat{F}^{-1}\widehat{g} \tag{4.8}$$

Observaţia 4.2.1. *Notaţia Ad provine din teoria grupurilor Lie unde desemnează reprezentarea adjunctă a grupului în spaţiul operatorilor liniari pe algebra Lie asociată. În cazul de faţă, rolul grupului Lie este jucat de grupul difeomorfismelor varietăţii, iar algebra Lie asociată este algebra câmpurilor vectoriale. Prin reprezentarea exponenţială descrisă mai sus se obţine grupul automofismelor lui $C^\infty(M)$, iar algebra Lie asociată este algebra derivărilor lui $C^\infty(M)$ (v.* [**3**], [**31**]*).*

Reprezentarea exponenţială a fluxurilor.

Ecuaţia (4.1) devine, prin reprezentarea exponenţială:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\widehat{q(t)} = \widehat{q(t)}\circ\widehat{f}^t \\ \\ \widehat{q}(0) = \widehat{q}_0, \end{cases} \tag{4.9}$$

deci fluxul definit de ecuaţie satisface:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\widehat{F^t} = \widehat{F^t}\circ\widehat{f}^t \\ \\ F^0 = \text{Id}. \end{cases} \tag{4.10}$$

Fluxul $\widehat{F^t}$ se numeşte *exponenţială cronologică la dreapta* şi, prin analogie cu cazul liniar, se notează

$$\widehat{F^t} = \overrightarrow{\exp}\int_0^t \widehat{f}^s ds \tag{4.11}$$

Pentru a simplifica notaţiile, dacă nu există pericolul de a face o confuzie, vom omite semnul $\widehat{\ }$ care desemnează reprezentarea obiectului respectiv.

Menţionăm aici că ecuaţiile (4.9), (4.10) nu sunt deocamdată justificate riguros întrucât nu am definit încă o topologie în spaţiile corespunzătoare de funcţionale sau operatori în $C^\infty(M)$. Acest lucru îl facem în cele ce urmează.

Topologia.

Considerăm pe $C^\infty(M)$ topologia convergenţei uniforme pe compacte a tuturor derivatelor. Mai precis, dacă $M = \Omega \subset \mathbb{R}^n$, pentru $\alpha \in C^\infty(M)$, $K \subset\subset M$ şi $k = (k_1, \ldots, k_n), k_i \geq 0$, definim seminormele:

$$\|\alpha\|_{s,K} = \sup\{|D^k\alpha(q)|;\ |k| = k_1 + \ldots + k_n \leq s, y \in K\}$$

Această familie de seminorme defineşte o topologie pe $C^\infty(M)$ care devine un spaţiu Fréchet (spaţiu liniar topologic local convex cu o topologie metrică completă dată de o metrică invariantă la translaţii). În această topologie $\alpha_m \to \alpha$ dacă şi numai dacă $\|\alpha_m - \alpha\|_{s,K} \to 0$, $\forall s \geq 0$ şi $K \subset\subset M$.

Pentru o varietate diferenţiabilă generală M, alegem o acoperire local finită cu hărţi locale $(V_i, \varphi_i)_{i\in I}$, $\varphi_i : Vi \to \mathcal{O}_i \subset \mathbb{R}^n$ difeomorfisme şi fie $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ o partiţie a unităţii subordonată acestei acoperiri. Definim familia de seminorme

$$\|\alpha\|_{s,K} = \sup\{D^k[(\alpha_i\alpha)\circ\varphi^{-1}](q)|\ |k| \leq s, \varphi^{-1}(q) \in K, i \in I\}$$

Această familie de seminorme depinde de alegerea atlasului de hărţi locale, dar topologia definită pe $C^\infty(M)$ este independentă de această alegere.

Odată definită topologia, considerăm pe $C^\infty(M)$ spaţiul operatorilor liniari continui $L(C^\infty(M))$. Spaţiile Diff (M) şi Vec (M) devin prin intermediul reprezentării cronologice subspaţii liniare. Într-adevăr, pentru $f \in$ Vec (M) şi $F \in$ Diff (M) are loc

$$\|\widehat{f}\alpha\|_{s,K} \leq C_1\|\alpha\|_{s+1,K}, \|\widehat{F}\alpha\|_{s,K} \leq C_2\|\alpha\|_{s,K}$$

unde constantele $C_1 = C_1(s, K, f)$, $C_2 = C_2(s, K, F)$. Se definesc astfel familiile de seminorme pe Vec (M) şi respectiv pe Diff (M):

$$\|f\|_{s,K} = \sup\{\|\widehat{f}\alpha\|_{s+1,K} | \|\alpha\|_{s,K} = 1\},$$

$$\|F\|_{s,K} = \sup\{\|\widehat{F}\alpha\|_{s,K} | \|\alpha\|_{s,K} = 1\},$$

care induc pe aceste spaţii topologii local convexe.

Pe aceste spaţii vom considera, de asemenea, şi topologiile slabe induse de $C^\infty(M)$: $F_n \rightharpoonup F$ dacă şi numai dacă $F_n\alpha \to F\alpha$, $\forall\alpha \in C^\infty(M)$.

Proprietăţi de diferenţiabilitate şi integrabilitate pentru familii de funcţii sau operatori.

Întâi vom caracteriza aceste proprietăţi pentru spaţiul $C^\infty(M)$ care este un spaţiu Fréchet.

În general, fie X un spaţiu Fréchet a cărui topologie este definită de o familie numărabilă de seminorme $\{p_k\}_{k\in\mathbf{N}}$. Metrica pe X este dată de

$$d(x,y)=\sum_{k\in\mathbf{N}}\frac{1}{2^k}\frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)}$$

Fie $h: J\subset \mathbb{R}\to X$. Funcţia h se numeşte diferenţiabilă în t_0 dacă există în X limita

$$\lim_{t\to t_0}\frac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0}.$$

Funcţia h se numeşte Lipschitz continuă dacă, pentru orice p_k, $p_k\circ h$ este Lipschitz continuă. Diferenţiabilitatea şi continuitatea Lipschitz pot fi definite folosind structura metrică a lui X.

Funţia h se numeşte mărginită dacă, pentru orice p_k, $p_k\circ h$ este mărginită.

Pentru a defini măsurabilitatea şi integrabilitatea adaptăm calea utilizată în cazul *integralei Bochner* (v. [**36**]). O funcţie h se numeşte funcţie în scară dacă se poate reprezenta sub forma

$$h=\sum_{n\in\mathbf{N}}x_n\chi_{J_n}$$

unde χ_{J_n} este funcţia caracteristică a unei mulţimi măsurabile $J_n\subset J$. O astfel de reprezentare se numeşte σ-reprezentare pentru h şi nu este unică. Spunem că funcţia h este *tare măsurabilă* dacă h este limita a.p.t. a unui şir de funcţii în scară. Funcţia h se numeşte *slab măsurabilă* dacă $x^*\circ h$ este măsurabilă pentru orice $x^*\in X^*$. Se poate demonstra că dacă X este separabil cele două noţiuni de măsurabilitate coincid (v. teorema lui Pettis, [**36**], în cazul în care X este spaţiu Banach). Dacă h este funcţie în scară, atunci h se numeşte *integrabilă* dacă

$$\sum_n\mu(J_n)p_k(x_n)\le\infty,\ \forall p_k.$$

Integrala lui h se defineşte ca fiind

$$\int_J h(t)dt=\sum_n\mu(J_n)x_n$$

şi se poate cu uşurinţă observa că definiţia este independentă de ordinea de sumare şi de σ-reprezentarea lui h.

Dacă h este o funcţie măsurabilă, spunem că ea este *integrabilă* dacă există un şir de de funcţii în scară, integrabile, $\{h_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ astfel încât

$$\lim_{n\to+\infty}\int_J p_k(h(t)-h_n(t))dt=0,\ \forall k.$$

Î n acest caz se poate arăta că există

$$\lim_{n\to+\infty}\int_J h_n(t)dt$$

şi aceasta este independentă de şirul $\{h_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ cu proprietăţile enunţate. Limita se notează cu

$$\int_J h(t)dt$$

şi se numeşte integrala lui h pe J.

Dată o familie $P^t, t \in J \subset \mathbb{R}$ de operatori liniari şi continui sau de funcţionale liniare continue pe $C^\infty(M)$, noţiunile definite mai sus, de continuitate, diferenţiabilitate, mărginire, măsurabilitate, integrabilitate, vor fi considerate în sens slab. Mai precis, funcţia $t \to P^t$ are una din aceste proprietăţi dacă $P^t \circ \alpha$ are proprietatea respectivă $\forall \alpha \in C^\infty(M)$.

Î n acest moment putem da un sens ecuaţiei operatoriale (4.10) şi se poate cu uşurinţă demonstra că are soluţie unică. Este de asemenea valabilă regula lui Leibniz :

$$\frac{d}{dt}P^t \circ Q^t|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}P^t|_{t=t_0} \circ Q^{t_0} + P^{t_0} \circ \frac{d}{dt}Q^t|_{t=t_0},$$

pentru două funcţii $t \to P^t$, $t \to Q^t$ diferenţiabile în t_0.

Considerăm acum fluxul F^t definit de (4.1) şi fie $G^t = (F^t)^{-1}$. Dacă diferenţiem identitatea $F^t \circ G^t = I$ obţinem

$$F^t \circ f^t \circ G^t + F^t \circ \frac{d}{dt}G^t = 0$$

deci

$$\text{(4.12)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}G^t = -f^t \circ G^t \\ \\ G^0 = \mathrm{Id} \end{cases}$$

Se defineşte în acest fel *exponenţiala cronologică la stânga* :

$$G^t = \overleftarrow{\exp}\int_0^t -f^t dt.$$

Extensii şi alte proprietăţi.

Am văzut că $\widehat{F_* g} = \mathrm{Ad}\ \widehat{F}^{-1}\widehat{g}$ pentru $F \in \mathrm{Diff}\,(M)$, $g \in \mathrm{Vec}\,(M)$. Calculăm acum derivata $\dfrac{d}{dt}|_{t=0}\mathrm{Ad}\ (\widehat{F^t})$ pentru un flux F^t pe M astfel încât

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}F^t|_{t=0} = f \in \mathrm{Vec}\ M \\ \\ F^0 = Id \end{cases}.$$

Are loc

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}(\mathrm{Ad}\ F^t)g = f \circ g - g \circ f = [f, g] =: (\mathrm{ad}\ \widehat{f})\widehat{g}.$$

În cazul particular

$$F^t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t f^s ds$$

obţinem:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\text{Ad } F^t)g = (\text{Ad } F^t)\text{ad } f^t g \\ \text{Ad } \widehat{F^0} = \text{Id} \end{cases},$$

deci putem scrie, formal:

$$\text{Ad } (\overrightarrow{\exp} \int_0^t f_s ds) = \overrightarrow{\exp}(\int_0^t \text{ad } f_s ds).$$

Fie acum $F \in \text{Diff } (M)$ şi g^t un câmp vectorial neautonom. Atunci

$$F \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t g^s ds \circ F^{-1} = \overrightarrow{\exp} \int_0^t (\text{Ad } F g^t) \tag{4.13}$$

Într-adevăr, cele două părţi ale egalităţii verifică aceeaşi problemă Cauchy pentru ecuaţia operatorială

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} q^t = q^t \circ (\text{Ad } F g^t) \\ \\ q^0 = \text{Id} \end{cases}$$

deci, din unicitatea soluţiei, coincid.

Considerăm din nou $G^t = (F^t)^{-1}$ şi diferenţiem identitatea $G^t \circ F^t = \text{Id}$. Obţinem că $\dfrac{d}{dt} G^t \circ F^t = -G^t \circ F^t \circ f^t$ şi deci

$$\frac{d}{dt} G^t = -G^t \circ (\text{Ad } F^t) f^t.$$

Aceasta ne dă legătura între exponenţialele cronologice la stânga şi la dreapta:

$$\overleftarrow{\exp} \int_0^t f^s ds = \overrightarrow{\exp} \int_0^t (\text{Ad } F^s) f^s ds \tag{4.14}$$

Aşa cum s-a văzut, dacă $F \in \text{Diff } (M)$, atunci acesta defineşte un automorfism al algebrei $C^\infty(M)$: $\widehat{F}\alpha = \alpha \circ F = F^*\alpha$. Aceasta sugerează faptul că $\widehat{F}$ poate fi extins ca automorfism de algebre la algebra graduată $\Lambda(M) = \bigoplus \Lambda^k(M)$ a formelor diferenţiale pe M. Dacă $\omega \in \Lambda^k(M)$ atunci definim

$$\widehat{F}\omega := F^*\omega.$$

Este binecunoscut faptul că F^* comută cu diferenţiala exterioară:

$$F^* \circ d = d \circ F^*$$

şi pentru $\omega_i \in \Lambda^{k_i}(M)$,

$$F^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = F^*(\omega_1) \wedge F^*(\omega_2).$$

Deci $\widehat{F}$ este automorfism al algebrei $\Lambda(M)$. Considerăm acum un câmp vectorial:

$$f = \frac{d}{dt}F^t|_{t=0}, \quad F^0 = \mathrm{Id}$$

Acţiunea pe $\Lambda^k(M)$ este derivata Lie a formelor diferenţiale:

$$\frac{d}{dt}\widehat{F}^t\omega|_{t=0} = \frac{d}{dt}(F^t)^*\omega|_{t=0} = L_f\omega.$$

Putem deci înţelege acţiunea unui câmp vectorial $f \in \mathrm{Vec}\ (M)$ drept derivata Lie a formelor diferenţiale:

$$\widehat{f} = L_f.$$

Exponenţiala cronologică la dreapta se scrie

$$F^t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t L_{f_s} ds.$$

Menţionăm două proprietăţi fundamentale ale derivatei Lie:

Deoarece $\widehat{F}^t \circ d = d \circ \widehat{F}^t$, are loc

$$\widehat{f} \circ d = d \circ \widehat{f}\ (\text{ echivalent } L_f \circ d = d \circ L_f).$$

Notăm cu i_f produsul interior al unei forme diferenţiale ω cu un câmp vectorial f: $i_f\omega(f_1, \ldots, f_k) = \omega(f, f_1, \ldots, f_k)$, pentru $\omega \in \Lambda^{k+1}(M), f_i \in \mathrm{Vec}\ M$. *Formula lui Cartan* este :

$$\widehat{f} = d \circ i_f + i_f \circ d. \tag{4.15}$$

Formula variaţiei constantelor.

Considerăm problema Cauchy pentru ecuaţia diferenţială liniară în $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} y' = Ay + b(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Soluţia ecuaţiei omogene ($b \equiv 0$) este $y(t) = e^{tA}y_0$. Pentru ecuaţia neomogenă se caută soluţia prin metoda *variaţiei constantelor* . Aceasta constă în a căuta o soluţie de forma $y(t) = e^{tA}c(t)$ şi se obţine astfel pentru $c(t)$ ecuaţia $c'(t) = A(t)b(t)$ care se integrează. Soluţia sistemului liniar neomogen este dată de *formula variaţiei constantelor*:

$$y(t) = e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)ds. \tag{4.16}$$

Considerăm acum ecuaţia diferenţială pe varietatea diferenţiabilă M

$$\dot{q} = f^t(q),$$

care generează fluxul $F^t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t f^s ds$. Considerăm de asemenea ecuaţia perturbată

$$\dot{q} = f^t(q) + g^t(q)$$

care generează fluxul $H^t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t (f^s + g^s)ds$, ce depinde de perturbarea g^t. Dorim să punem în evidenţă această dependenţă. În acest scop procedăm ca în cazul liniar şi căutăm H^t de forma

$$H^t = G^t \circ F^t$$

unde fluxul G^t urmează să fie determinat. Diferenţiind această egalitate găsim

$$\frac{d}{dt}H^t = G^t \circ F^t \circ (f^t + g^t) =$$

$$= \frac{d}{dt}G^t \circ F^t + G^t \circ \frac{d}{dt}F^t = \frac{d}{dt}G^t \circ F^t + G^t \circ F^t \circ f^t.$$

Astfel,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}G^t = G^t \circ F^t \circ f^t \circ (F^t)^{-1} = G^t \circ \text{Ad } F^t g^t \\ \\ G^0 = \text{Id} \end{cases}$$

Am obţinut deci

$$G^t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{Ad } F^s g^s ds$$

şi prima formă a formulei variaţiei contantelor este

$$H^t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{Ad } F^s g^s ds \circ F^t. \tag{4.17}$$

Obţinem de asemenea

$$H^t = F^t \circ \text{Ad } (F^t)^{-1} (\overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{Ad } F^s g^s ds)$$

şi din (4.13)

$$H^t = F^t \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{Ad } [(F^t)^{-1} \circ F^s] g^s ds = F^t \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t (F_s^t)_* g^s ds \tag{4.18}$$

unde $F_s^t = \overrightarrow{\exp} \int_s^t f^\tau d\tau$.

Formula variaţiei constantelor se poate astfel rescrie într-o a doua formă

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t f^s + g^s ds = \overrightarrow{\exp} \int_0^t f^s ds \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_t^s \text{ad } f^\tau d\tau g^s ds.$$

În cazul în care f, g sunt câmpuri vectoriale autonome, formula variaţiei constantelor capătă forma (a se compara cu (4.16)):

$$e^{t(f+g)} = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{Ad } e^{sf} g ds \circ e^{tf} = e^{tf} \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{Ad } e^{(s-t)f} g ds.$$

DEFINIŢIA 4.2.1. *O structură simplectică pe o varietate diferenţiabilă N (în mod necesar de dimensiune pară) este o 2-formă diferenţială, nedegenerată şi închisă. O varietate diferenţiabilă înzestrată cu o structură simplectică se numeşte varietate simplectică.*

Fie M o varietate diferenţiabilă şi $T^*M = \cup_{y\in M} T_q^*M$ fibratul cotangent. Dacă $(q^1, \ldots, q^n)$ sunt coordonate locale pe M atunci, dacă $p \in T_q^*M$, $p = \sum_{i=1}^{n} p_i dq^i$, $(p_1, \ldots, p_n, q^1, \ldots, q^n)$ definesc coordonatele locale canonice pe T^*M. Fie

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i. \tag{4.19}$$

Pentru a vedea că definiţia este independentă de alegerea coordonatelor locale, fie $\pi : T^*M \to M$ proiecţia canonică şi fie 1-forma canonică pe T^*M:

$$\omega_{1\xi}(w) = \xi \circ \pi_*(w), \qquad \text{pentru } w \in T_\xi(T^*M)$$

Dacă $w \in T(T^*M)$, atunci $w = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial p_i} + v^i \frac{\partial}{\partial q^i}$. Întrucât $\pi_* \left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) = 0$ şi $\pi_* \left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) = \frac{\partial}{\partial q^i}$, găsim că

$$\omega_{1\xi}(w) = \sum_{i=1}^{n} p_i v^i$$

deci

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{n} p_i dq^i$$

şi

$$\omega = d\omega_1.$$

Se vede acum cu uşurinţă că ω este o structură simplectică pe T^*M, care devine în acest fel o varietate simplectică.

Fie acum (N, ω) o varietate simplectică generală. Funcţiile din $C^\infty(N)$ se numesc *hamiltonieni*. Fie H un hamiltonian pe N. Atunci există un unic câmp vectorial pe N notat $\overrightarrow{H}$ atfel încât

$$-i_{\overrightarrow{H}}\omega = \omega(\cdot, \overrightarrow{H}) = dH.$$

$\overrightarrow{H}$ se numeţe *câmpul vectorial hamiltonian* al lui H iar fluxul corespunzător este *fluxul hamiltonian*. *Ecuaţia lui Hamilton* sau *sistemul hamiltonian* este

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = \overrightarrow{H}(\xi(t)) \tag{4.20}$$

iar fluxul hamiltonian este

$$\Xi^t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \overrightarrow{H} ds.$$

Paranteza Poisson a hamiltonienilor α, β se defineşte prin

$$\{\alpha, \beta\} = L_{\overrightarrow{\alpha}}\beta = d\beta(\overrightarrow{\alpha}) = \omega(\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}) = -\{\beta, \alpha\}$$

Aceasta reprezintă derivata lui β de-a lungul fluxului hamiltonian definit de α.

Se poate cu uşurinţă demonstra că $(C^\infty(N), \{\cdot, \cdot\})$ este o algebră Lie şi că aplicaţia $H \to \overrightarrow{H}$ este morfism de algebre Lie de la $C^\infty(M)$ la Vec (M). Biliniaritatea şi antisimetria sunt imediate. Identitatea lui Jacobi, ca şi faptul că $\overrightarrow{\{\alpha, \beta\}} = [\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}]$, se demonstrează uşor dacă în coordonate locale ω are forma canonică (4.19). Argumentul este complet întrucât, din teorema lui Darboux (v. [**3**]), există un atlas simplectic pe N astfel încât ω în coordonate locale se exprimă în formă canonică. În aceste coordonate

$$\overrightarrow{H} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

şi

$$\{\alpha, \beta\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial p_i}\frac{\partial \beta}{\partial q^i} - \frac{\partial \alpha}{\partial q^i}\frac{\partial \beta}{\partial p_i}.$$

Sistemul hamiltonian (4.20) se scrie în forma (2.4).

Dacă $F \in$ Diff (N) păstrează structura simplectică, i.e. $F^*\omega = \omega$, atunci Ad $F\overrightarrow{H} = \overrightarrow{FH}$. Într-adevăr,

$$\omega(\cdot, \overrightarrow{FH}) = d(FH) = d(H \circ F) = H_* \circ F_* = dH \circ F_* =$$
$$= \omega(F_*\cdot, \overrightarrow{H}) = F^*\omega(\cdot, (F_*)^{-1}\overrightarrow{H}) = \omega(\cdot, \text{Ad } F\overrightarrow{H}).$$

Integralele prime ale sistemelor hamiltoniene autonome sunt funcţiile ce comută cu hamiltonianul. Într-adevăr, fie ecuaţia (4.20). Atunci $\alpha \in C^\infty(N)$ este integrală primă dacă şi numai dacă $e^{t\overrightarrow{H}}\alpha = const$ ceea ce este echivalent, prin diferenţiere, cu $\overrightarrow{H}\alpha = 0$ sau $\{H, \alpha\} = 0$.

Considerăm din nou cazul varietăţii simplectice T^*M. Dat un câmp vectorial neautonom $f^t \in$ Vec (M), considerăm hamiltonianul pe T^*M:

$$(f^t)^\#(\xi) = (\xi, f^t). \tag{4.21}$$

În coordonate simplectice canonice (p_i, q^i), dacă $f^t = \sum_{i=1}^n f_i(t,q)\frac{\partial}{\partial q^i}$, atunci $(f^t)^\#(\xi) = \sum_{i=1}^n p_i f_i(t,q)$. Folosind exprimarea în coordonate locale se vede

cu uşurinţă că pentru $f, g \in \text{Vec}\ (M)$

$$\{f^{\#}, g^{\#}\} = [f, g]^{\#}.$$

Pentru un câmp vectorial neautonom f^t, câmpul vectorial hamiltonian pe T^*M definit prin $\overrightarrow{(f^t)^{\#}}$ se numeşte *liftul hamiltonian*. Acesta satisface

$$\pi_* \overrightarrow{(f^t)^{\#}} = f^t.$$

Stabilim în continuare legătura între fluxurile determinate de f^t, respectiv de $\overrightarrow{(f^t)^{\#}}$. Fie $F_\tau^t = \overrightarrow{\exp} \int_\tau^t f^s ds$. Aunci $(F_\tau^t)^* \in \text{Diff}\ (T^*M)$. Fie

$$g^\tau = \frac{d}{dt}|_{t=\tau} (F_\tau^t)^*$$

PROPOZIŢIA 4.2.1. $g^t = -\overrightarrow{(f^t)^{\#}}$ *şi*

$$(F_\tau^t)^* = \overrightarrow{exp} \int_t^\tau \overrightarrow{(f^s)^{\#}} ds \tag{4.22}$$

Demonstraţie Întrucât $F_\tau^{t+\varepsilon} = F_\tau^t \circ F_t^{t+\varepsilon}$, urmează, prin diferenţiere în raport cu ε în 0, că

$$\frac{d}{dt}(F_\tau^t)^* = g^t \circ (F_\tau^t)^*,$$

deci

$$(F_\tau^t)^* = \overleftarrow{\exp} \int_\tau^t g^s ds.$$

Deoarece

$$\pi \circ (F_\tau^t)^* = (F_\tau^t)^{-1} \circ \pi$$

rezultă că

$$\pi_* g^t = -f^t \tag{4.23}$$

Pe de altă parte, fluxul $(F_\tau^t)^*$ păstrează 1-forma ω_1 şi prin urmare forma simplectică ω. Din formula lui Cartan (4.15) avem că

$$0 = L_{g^t} \omega_1 = i_{g^t} \omega + d\omega_1(g^t),$$

de unde

$$g^t = \overrightarrow{\omega_1(g^t)}.$$

Aceasta înseamnă că câmpul vectorial g^t este hamiltonian iar concluzia propoziţiei urmează din (4.23). ■

CAPITOLUL 5

Controlabilitatea sistemelor diferenţiale

5.1. Teorema orbitei şi consecinţe

Considerăm o varietate diferenţiabilă M, o familie de câmpuri vectoriale $\mathcal{F} = \{f^u | u \in U\}$ şi sistemul controlat

$$\dot{q} = f^u(q). \tag{5.1}$$

Mulţimea controalelor admisibile $\mathcal{U}$ este în cele ce urmează mulţimea funcţiilor constante pe porţiuni, cu valori în U.

Orbita care trece prin q_0 se defineşte ca fiind

$$\mathcal{O}_{q_0} := \{q_0 \circ e^{t_1 f_1} \circ \cdots \circ e^{t_k f_k} | t_i \in \mathbb{R}, f_i \in \mathcal{F}, k \in \mathbf{N}\}.$$

În acelaşi mod se defineşte orbita în raport cu o familie oarecare de câmpuri vectoriale $\mathcal{F}$.

TEOREMA 5.1.1. (*Teorema orbitei-Nagano, Sussmann*) *Fie $\mathcal{F} \subset Vec\ M$ o familie de câmpuri vectoriale şi $q_0 \in M$. Atunci orbita $\mathcal{O}_{q_0}$ are următoarele proprietăţi:*

(1) *$\mathcal{O}_{q_0}$ este subvarietate imersată a lui M.*
(2) *Pentru $q \in \mathcal{O}_{q_0}$, $T_q\mathcal{O}_{q_0} = \text{span}\ \{q \circ (Ad\ F)f |\ F \in \mathcal{P}, f \in \mathcal{F}\}$ unde $\mathcal{P} = \{e^{t_1 f_1} \circ \cdots \circ e^{t_k f_k} | t_i \in \mathbb{R}, f_i \in \mathcal{F}, k \in \mathbf{N}\}$*

Demonstraţie Vom construi pe M o topologie mai tare în care orbitele reprezintă componentele conexe. Fie $(\text{Ad}\ \mathcal{P})\mathcal{F} = \{(\text{Ad}\ F)f |\ F \in \mathcal{P}, f \in \mathcal{F}\}$ şi fie $\pi_q = \text{span}\ \{q \circ (\text{Ad}\ \mathcal{P})\mathcal{F}\}$. π_q este spaţiu liniar, subspaţiu al spaţiului tangent T_qM despre care vom arăta că este de fapt spaţiul tangent la $\mathcal{O}_{q_0}$ în punctul q.

Pasul 1. Demonstrăm că $\dim \pi_{q_0} = \dim \pi_q$ pentru orice $q \in \mathcal{O}_{q_0}$.
Deoarece $q \in \mathcal{O}_{q_0}$ rezultă că $q = q_0 \circ P$ pentru un $P \in \mathcal{P}$. Fie acum $v = q_0 \circ (\text{Ad}\ F)f \in \pi_{q_0}$. Atunci

$$P_* v = v \circ P = q_0 \circ F \circ f \circ F^{-1} \circ P = q \circ (\text{Ad}\ P^{-1} \circ F)f \in \pi_q$$

deci $\dim \pi_{q_0} \leq \dim \pi_q$ (Q_* este izomorfism de spaţii liniare). Pentru a arăta inegalitatea inversă putem schimba rolul lui q cu q_0 deoarece $q_0 \in \mathcal{O}_q$. ■

Pasul 2. Fie $q \in \mathcal{O}_{q_0}$ şi $m = \dim \pi_{q_0}$. Fie $f_1, \ldots, f_m \in (\text{Ad}\ \mathcal{P})\mathcal{F}$ astfel încât $f_1(q), \ldots, f_m(q)$ formează o bază în π_q. Fie $\mathcal{V}_0$ o vecinătate a lui 0 în $\mathbb{R}^m$ şi fie $\varphi_q : \mathcal{V}_0 \to M$ definită prin:

$$\varphi_q(t_1, \ldots, t_m) = q \circ e^{t_1 f_1} \circ \cdots \circ e^{t_m f_m}$$

Arătăm că pentru o vecinătate $\mathcal{V}_0$ suficient de mică φ_q este imersie şi mulţimile de forma $\varphi_q(\mathcal{V}_0)$ formează un atlas pe $\mathcal{O}_{q_0}$ şi de asemenea formează o bază de vecinătăţi, fiind astfel definite structurile topologică şi de varietate diferenţiabilă.

i) $D\varphi_q(0)$ are rangul m deoarece $\dfrac{\partial\varphi_q}{\partial t_i}(0) = f_i(q)$. Rezultă că pentru o vecinătate $\mathcal{V}_0$ suficient de mică $D\varphi_q(t)$ are rangul m şi deci φ_q este imersie, deci $\varphi_q(\mathcal{V}_0)$ este subvarietate m dimensională a lui M.

ii) Arătăm că $\varphi_q(\mathcal{V}_0) \subset \mathcal{O}_q$ şi $D\varphi_q T_t\mathbb{R}^m = \pi_{\varphi_q(t)}$ pentru $t \in \mathcal{V}_0$. Într-adevăr, există $g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{F}, F_1, \ldots, F_m \in \mathcal{P}$ astfel încât $f_i = (\text{Ad } F_i)g_i$, $i = 1, \ldots, m$. În plus pentru $s \in R$ are loc

$$e^{s(\text{Ad } F_i)}g_i = (\text{Ad } F_i)e^{sg_i} \in \mathcal{P}$$

deci $\varphi_q(t) \in \mathcal{O}_q$.

Pentru a arăta egalitatea $D\varphi_q T_t\mathbb{R}^m = \pi_{\varphi_q(t)}$ este suficient să demonstrăm incluziunea $''\subseteq''$ deoarece dimensiunea celor două spaţii liniare coincide (amintim că din construcţia lui φ_q, v. i), rangul lui $D\varphi_q$ este m). Într-adevăr, ţinând cont că $(e^{t_k f_k} \circ \cdots \circ e^{t_m f_m})^{-1} \in \mathcal{P},\ f_k \in \mathcal{F}$, rezultă că:

$$\frac{\partial}{\partial t_k}\varphi_q(t) = q \circ e^{t_1 f_1} \circ \cdots \circ f_k \circ e^{t_k f_k} \circ \cdots \circ e^{t_m f_m} =$$

$$= \varphi_q(t) \circ \text{Ad } (e^{t_k f_k} \circ \cdots \circ e^{t_m f_m})^{-1} f_k \in \pi_{\varphi_q(t)}$$

iii) Structura topologică pe M. Fie $q \in M$ şi fie $\bar{q} \in \varphi_q(\mathcal{V}_0)$. Fie $\varphi_{\bar{q}}$ aplicaţia corespunzătoare construită cu ajutorul câmpurilor vectoriale $\bar{f}_i$, $i = 1, \ldots, m$. Arătăm că pentru t suficient de mic (de exemplu în norma $\|\cdot\|_\infty$) $\varphi_{\bar{q}}(t) \in \varphi_q(\mathcal{V}_0)$. Întrucât $\bar{f}_1(\tilde{q}) \in \pi_{\tilde{q}}$ pentru $\tilde{q} \in \varphi_q(\mathcal{V}_0)$, iar din *ii)* avem că $\pi_{\tilde{q}}$ este spaţiul tangent la subvarietatea $\varphi_q(\mathcal{V}_0)$, rezultă că pentru t_1 suficient de mic $\bar{q} \circ e^{t_1\bar{f}_1} \in \varphi_q(\mathcal{V}_0)$. Repetând raţionamentul obţinem că $\varphi_{\bar{q}}(t) \in \varphi_q(\mathcal{V}_0)$ pentru t suficient de mic. Am demonstrat astfel că mulţimile de tipul $\varphi_q(\mathcal{V}_0)$ formează o bază de vecinătăţi în M.

Până în acest moment am definit pe M o structură topologică, pe care o vom numi Γ, iar pe orice obită $\mathcal{O}_{q_0}$ se poate defini o structură de varietate diferenţiabilă, compatibilă cu structura topologică definită anterior. Structura de varietate diferenţiabilă este definită de hărţile locale de tipul $(\varphi_q(\mathcal{V}_0), \varphi_q^{-1})$. În plus, din a doua relaţie din *ii)* rezultă că $T_q\mathcal{O}_{q_0} = \pi_q$.

iv) Orbitele sunt componente conexe în noua topologie pe M. Într-adevăr, întrucât aplicaţiile de tipul $t \to q \circ e^{tf}$ cu $q \in M, f \in \mathcal{F}$ sunt continue în topologia Γ, rezultă că orbitele sunt conexe prin arce, deci conexe. O orbită oarecare $\mathcal{O}_{q_0}$ este simultan mulţime deschisă şi închisă. Deschiderea rezultă imediat din iii). Pentru a demonstra închiderea alegem $q_n \in \mathcal{O}_{q_0}$, $q_n \to q$ în topologia Γ. Rezultă, din definiţia lui Γ, că $q_n \in \mathcal{O}_q$ pentru n suficient de mare. $\mathcal{O}_{q_0} \cap \mathcal{O}_q \neq \phi$ deci $\mathcal{O}_{q_0} = \mathcal{O}_q$ şi $q \in \mathcal{O}_{q_0}$. ■

PROPOZIŢIA 5.1.1. *Algebra Lie generată de $\mathcal{F}$ are proprietatea că pentru orice $q \in \mathcal{O}_{q_0}$*

$$Lie\ {}_q\mathcal{F} \subseteq T_q\mathcal{O}_{q_0}\ . \tag{5.2}$$

Demonstraţie Pentru $f \in \mathcal{F}$ şi $q \in \mathcal{O}_{q_0}$, întrucât $t \to q \circ e^{tf}$ este curbă în $\mathcal{O}_{q_0}$, rezultă că $f(q) \in T_q\mathcal{O}_{q_0}$. Ştim de asemenea că dacă două câmpuri vectoriale pe M sunt tangente la o subvarietate în toate punctele acesteia, atunci croşetul Lie este tangent la subvarietate în fiecare punct al acesteia. Aşadar, pentru $f_i \in \mathcal{F}, i = 1, \ldots, k$ are loc

$$[f_1, [\ldots [f_{k-1}, f_k] \ldots](q) \in T_q\mathcal{O}_{q_0},$$

de unde rezultă (5.2) ■

O consecinţă imediată a teoremei orbitei este teorema lui Chow-Rashevsky:

TEOREMA 5.1.2. (*Chow-Rashevsky*) *Fie M o varietate diferenţiabilă, netedă şi conexă şi fie $\mathcal{F} \subset Vec\ M$. Dacă*

$$Lie_q\mathcal{F} = T_qM,\ \forall q \in M, \tag{5.3}$$

atunci

$$\mathcal{O}_q = M,\ \forall q \in M \tag{5.4}$$

Demonstraţie Folosim propoziţia precedentă şi observaţia că subvarietăţile lui M de aceeaşi dimensiune cu varietatea sunt în mod necesar mulţimi deschise în M. ■

OBSERVAŢIA 5.1.1. *Rezultatul precedent este în esenţă un rezultat de controlabilitate. Astfel, dacă*

$$\mathcal{F} = -\mathcal{F} \tag{5.5}$$

cu $\mathcal{F} = \{f^u, u \in U\}$ rezultă că $\mathcal{A}_{q_0} = \mathcal{O}_{q_0}$ şi dacă în plus sunt satisfăcute ipotezele teoremei 5.1.2, atunci sistemul (5.1) este controlabil.

5.2. Sisteme analitice. Integrabilitate. Teorema lui Frobenius

Am văzut în paragraful precedent că orbitele sunt varietăţi imersate. Desigur, în studiul problemelor de control este importantă caracterizarea mulţimilor accesibile care, în cazul simetric (5.5), coincid cu orbitele. Cunoaşterea orbitei este echivalentă din punct de vedere teoretic cu cunoasterea spaţiilor tangente la aceasta. Incluziunea (5.2) ne dă o caracterizare parţială a acestora. Această incluziune poate fi şi strictă, după cum vom vedea in exemplul care urmează. Paragraful acesta analizează cazul în care incluziunea (5.2) devine egalitate. Acesta este cazul în care modulul Lie $\mathcal{F}$ peste $C^\infty(M)$ este local finit generat.

EXEMPLUL 5.2.1. *Fie* $M = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F} = \left\{\eta(x_2)\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}\right\}$ *unde* $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. *Pentru* $q = (x_1, x_2)$ *se observă cu uşurinţă că* $\mathcal{O}_q = \mathbb{R}^2$, *însă dacă* $\eta(x_2) = 0$ *rezultă că* $\mathrm{Lie}_q\mathcal{F} = \mathrm{span}\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right\}$, $\dim \mathrm{Lie}_q\mathcal{F} = 1$, *deci incluziunea (5.2) este strictă.*

Aşadar, Vec M, pe lângă structura de algebră Lie are si o structura de modul peste inelul $C^\infty(M)$. Un submodul $\mathcal{S} \subset \mathrm{Vec}\ M$ se numeşte *finit generat* dacă există $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{S}$ astfel încât $\mathcal{S} = \left\{\sum_{k=1}^m \alpha_k f_k : \alpha_k \in C^\infty(M)\right\}$. Submodulul respectiv se numeşte *local finit generat* dacă orice punct $q \in M$ are o vecinătate $\mathcal{V}$ astfel încât $\mathcal{S}|_{\mathcal{V}}$ este modul finit generat peste $C^\infty(\mathcal{V})$.

Rezultatul principal al acestui paragraf este:

TEOREMA 5.2.1. *Fie* $\mathcal{F} \subset$ *Vec* M *astfel încât modulul peste* $C^\infty(M)$ *generat de* Lie $\mathcal{F}$ *este local finit generat. Atunci pentru orice* $q_0 \in M$ *şi pentru orice* $q \in \mathcal{O}_{q_0}$

$$T_q\mathcal{O}_{q_0} = Lie_q\mathcal{F}. \tag{5.6}$$

Pentru demonstraţia teoremei avem nevoie de următorul rezultat

PROPOZIŢIA 5.2.1. *Fie* $\mathcal{S} \subset$ *Vec* M *un submodul finit generat peste* $C^\infty(M)$. *Fie de asemenea* $g \in$ *Vec* M *astfel încât*

$$(ad\ g)\mathcal{S} := \{[g, f], f \in \mathcal{S}\} \subset \mathcal{S}. \tag{5.7}$$

Atunci Ad $e^{tg}\mathcal{S} = \mathcal{S}$.

Demonstraţie Fie $f_1 \ldots, f_m \in \mathcal{S}$ un sistem de generatori şi fie $f_i(t) = \mathrm{Ad}\ e^{tg} f_i$. Întrucât $\{f_i\}$ este sistem de generatori, rezultă că există $\alpha_{ij} \in C^\infty(M), i, j = 1, \ldots, m$ astfel încât

$$(\mathrm{ad}\ g)f_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} f_j.$$

Câmpurile vectoriale $f_i(t)$ verifică sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\frac{d}{dt}f_i(t) = \frac{d}{dt}\text{Ad } e^{tg}f_i = \text{Ad } e^{tg}[g, f_i] =$$

$$= (\text{Ad } e^{tg})\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}f_j = \sum_{j=1}^{m}(e^{tg}\alpha_{ij})\text{Ad } e^{tg}f_j = \sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}(t)f_j(t)$$

unde am notat cu $\alpha_{ij}(t) := e^{tg}\alpha_{ij}$. Dacă notăm cu $X(t) = (a_{ij}(t))$, $X(0) =$ Id matricea fundamentală asociată sistemului liniar cu matrice $(\alpha_{ij}(t))$, rezultă că

$$f_i(t) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)f_i(0) \in \mathcal{S}$$

deoarece $f_i(0) = f_i$ formează un sistem de generatori pentru $\mathcal{S}$. ■

Demonstraţia teoremei 5.2.1 Trebuie să demonstrăm incluziunea inversă

$$T_q\mathcal{O}_{q_0} \subseteq \text{Lie}_q\mathcal{F}. \tag{5.8}$$

Notăm cu $\mathcal{S}$ modulul peste $C^\infty(M)$ generat de Lie$\mathcal{F}$. Se observă că $\mathcal{S} = \{\alpha f : \alpha \in C^\infty(M), f \in \text{Lie}\mathcal{F}\}$ şi deci $\mathcal{S}_q = \text{Lie}_q\mathcal{F}$. Întrucât pentru $g \in \mathcal{F}$ are loc (ad g)Lie$\mathcal{F} \subset$ Lie$\mathcal{F}$, rezultă din propoziţia 5.2.1 că (Ad e^{tg})$\mathcal{S} = \mathcal{S}$. Din caracterizarea spaţiului tangent la orbită dată în teorema 5.1.1, punctul *(2).* şi consideraţiile precedente, obţinem incluziunea (5.8). ■

COROLAR 5.2.1. *Dacă M este varietate analitică şi $\mathcal{F} \subset$ Vec M este o familie de câmpuri vectoriale analitice, atunci are loc (5.6).*

Demonstraţie Facem pentru început observaţia că propoziţia 5.2.1 şi teorema 5.2.1 rămân valabile dacă considerăm M varietate analitică şi înlocuim pe $C^\infty(M)$ cu $C^\omega(M)$, spaţiul funcţiilor analitice pe M.

Rămâne numai de arătat că modulul $\mathcal{S}$ peste $C^\omega(M)$, generat de Lie $\mathcal{F}$, este local finit generat. De altfel este suficient să arătăm în loc că, pentru $g \in \mathcal{F}$, $f \in \mathcal{S}$, are loc Ad $e^{tg}f \in \mathcal{S}$. Are loc egalitatea Ad $e^{tg}f = e^{t[g,f]}$ şi, cum soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale cu membrul drept analitic sunt analitice, putem scrie că, pentru un $q \in M$

$$q \circ e^{t[g,f]} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}q \circ (\text{ad } g)^k f,$$

iar convergenţa seriei are loc uniform pe compacte din $\mathbb{R}$. Cum $q\circ(\text{ad } g)^k f \in Lie_q\mathcal{F}$, rezultă că $q \circ e^{t[g,f]} \in Lie_q\mathcal{F}$ şi deci Ad $e^{tg}f \in \mathcal{S}$. ■

O altă consecinţă remarcabilă a teoremei orbitei este *teorema lui Frobenius.* Pentru a descrie acest rezultat introducem noţiunea de distribuţie . Se numeşte *distribuţie* de dimensiune $m < n$ pe M o familie de subspaţii tangente în fiecare punct q al varietăţii, $\Delta = \{\Delta_q \subset T_qM : q \in M\}$, de dimensiune dim $\Delta_q = m$. Vom spune că distribuţia este *integrabilă* dacă

în vecinătatea fiecărui punct q_0 există o subvarietate N_{q_0} de dimensiune m astfel încât pentru orice $q \in N_{q_0}$ are loc $T_q N_{q_0} = \Delta_q$.

Notăm cu $\text{Sec } \Delta = \{f \in \text{Vec } M : f(q) \in \Delta_q, \forall q \in M\}$.

TEOREMA 5.2.2. *Distribuţia $\Delta \subset TM$ este integrabilă dacă şi numai dacă are loc condiţia lui Frobenius:*

$$f_1, f_2 \in \text{Sec } \Delta \Longrightarrow [f_1, f_2] \in \text{Sec } \Delta \tag{5.9}$$

Demonstraţie Presupunem că distribuţia Δ este integrabilă. Deoarece orice câmp vectorial din Sec Δ este tangent la N_{q_0}, rezultă că, în vecinătatea lui q_0, $\mathcal{O}_{q_0} \subset N_{q_0}$. Întrucât cu $\mathcal{F} = \text{Sec } \Delta$ are loc (5.2), rezultă că $\dim \mathcal{O}_{q_0} \geq \dim \text{Lie}_{q_0}\text{Sec } \Delta \geq \dim N_{q_0}$ şi deci, în vecinătatea lui q_0, $N_{q_0} = \mathcal{O}_{q_0}$. Incluziunea (5.2) devine astfel egalitate şi deci are loc (5.9).

Reciproc, presupunem că are loc (5.9). Atunci, în vecinătatea lui q_0 putem găsi $f_1, \ldots, f_m$, bază pentru Δ. Deoarece are loc (5.9), rezultă că există $\alpha_{ij}^k \in C^\infty, i, j, l = 1, \ldots, m$, definite în vecinătatea lui q_0, astfel încât

$$[f_i, f_j] = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ij}^k f_k.$$

Aceasta ne spune că Lie Sec Δ = Sec Δ deci Lie Sec Δ este modul finit generat peste C^∞. Aşadar (5.2) are loc cu egalitate şi deci $T_q\mathcal{O}_{q_0} = \Delta_q$. Rezultă că varietatea integrală căutată este $N_{q_0} = \mathcal{O}_{q_0}$. ■

CAPITOLUL 6

Principiul de maxim al lui Pontriaghin

6.1. Mulţimi accesibile şi probleme de control optimal

În ceea ce urmează considerăm ecuaţia controlată, pe varietatea n dimensională M, cu dată iniţială fixată:

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = f(q(t), u(t)) =: f^{u(t)}(q(t)) \\ q(0) = q_0 \end{cases} \tag{6.1}$$

Ipotezele asupra lui f şi asupra controalelor (strategiilor) admisibile $\mathcal{U}$ sunt astfel încât pentru orice $u \in \mathcal{U}$, câmpul vectorial neautonom $f^{u(t)}$ satisface ipotezele din teorema lui Carathéodory 4.1.1. De exemplu, vom presupune că:

- $U \subset \mathbb{R}^m$ este mulţime închisă iar mulţimea strategiilor admisibile $\mathcal{U} = \{u : [0,T] \to U : u \in L^\infty(0,T)\}$
- f, f_q sunt funcţii continue în ansamblul variabilelor (q,u)

Mulţimea accesibilă la momentul t se defineşte după cum urmează:

$$\mathcal{A}_{q_0}(t) = \{q_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t f^{u(\tau)} d\tau | u \in \mathcal{U}\}$$

Notăm cu $q^u(t) = y_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t f^{u(\tau)} d\tau$ iar fluxul corespunzător ecuaţiei:

$$F_s^t = \overrightarrow{\exp} \int_s^t f^{u(\tau)} d\tau.$$

În cele ce urmează vom vedea cum problemele de control optimal se reduc la studiul mulţimilor accesibile.

Teorema 6.1.1. *Dacă $q^{u^*(T)} \in \partial\mathcal{A}_{q_0}(T)$ (frontiera mulţimii $\mathcal{A}_{q_0}(T)$), atunci pentru orice $0 < s < T$, $q^{u^*(s)} \in \partial\mathcal{A}_{q_0}(s)$.*

Demonstraţie Observăm că $F_s^T(\mathcal{A}_{q_0}(s)) \subset \mathcal{A}_{q_0}(T)$ şi, întrucât F_s^T este difeomorfism, $F_s^T(\text{int } \mathcal{A}_{q_0}(s)) \subset \text{int } \mathcal{A}_{q_0}(T)$ iar concluzia este imediată. ■

Vom numi de asemenea *optimale* aceste traiectorii care în fiecare moment t se află pe frontiera mulţimii acessibile corespunzătoare, iar controlul corespunzător îl numim *control optimal* .

Considerăm ecuaţia controlată (6.1). Fie un lagrangean L pe TM şi l o funcţie reală definită pe M. Problema de control optimal este de a găsi

controlul admisibil $u \in \mathcal{U}$ astfel încât (u, q^u) minimizează o funcţională de cost J. După forma funcţionalei de cost J distingem trei tipuri de probleme:

$$\begin{aligned} J(q,u) &= \int_0^T L(q(t),u(t))dt && \textit{Problema Lagrange} \\ J(q,u) &= \int_0^T L(q(t),u(t))dt + l(q(T)) && \textit{Problema Bolza} \\ J(q,u) &= l(q(T)) && \textit{Problema Mayer}. \end{aligned}$$

Vom vedea că cele trei probleme sunt formal echivalente, diferenţele apărând la condiţiile de regularitate care trebuiesc impuse asupra funcţiilor ce intervin.

O problemă Lagrange cu $L \equiv 1$ şi T liber devine o *problemă de timp optimal*.

Un control optimal u^* se numeşte *control bang-bang* dacă $u^* \in \partial U$ a.p.t. $t \in (0, T)$.

Considerăm pentru început cazul problemei *Lagrange* cu capătul final fixat:

$$q(T) = q_1.$$

Pentru a reduce problema la o problema de mulţimi accesibile, introducem o nouă variabilă j şi considerăm un nou sistem:

$$\left\{ \begin{array}{l} j' = L(q,u) \\ \dot{q} = f(q,u) \\ q(0) = q_0, j(0) = 0 \end{array} \right. \tag{6.2}$$

cu datele iniţiale Considerăm mulţimea controalelor $u \in \mathcal{U}$ astfel încât $q^u(T) = q_1$. Dacă (u^*, q^*) este pereche optimală atunci

$$(j(T), q^*(T)) \in \partial \mathcal{A}_{(0,q_0)}(T)$$

unde $\mathcal{A}_{(0,q_0)}$ reprezintă mulţimea accesibilă pentru sistemul (6.2). Această transformare are inconvenientul că nu distinge între traiectoriile ce realizează minimul lui J şi cele care realizează maximul. Pentru a corecta acest lucru, considerăm o mulţime extinsă de controale $\widetilde{\mathcal{U}} = \{(u, v) | u \in \mathcal{U}, v \in [0, +\infty)\}$ şi problema modificată

$$\left\{ \begin{array}{l} j' = L(q,u) + v \\ \dot{q} = f^u(q) \\ q(0) = q_0, j(0) = 0 \end{array} \right. \tag{6.3}$$

Dacă u^* este control optimal pentru problema Lagrange atunci $(u^*, 0)$ este control optimal pentru (6.3).

Deoarece *problema Mayer* este un caz particular al *problemei Bolza*, descriem în cele ce urmează reducerea la o problemă de mulţimi accesibile în cazul celei din urmă, cu capătul final liber.

Introducem noua variabilă de stare j, mulţimea extinsă de controale $\widetilde{U}$ şi considerăm noul sistem de stare:

$$\begin{cases} j' = L(q,u) + L_{f^u} l(q) + v \\ \dot{q} = f(q,u) \\ q(0) = q_0, j(0) = 0 \end{cases} . \tag{6.4}$$

unde, $L_{f^u} l$ este derivata Lie a lui l, care se exprimă în coordonate locale prin $L_{f^u} l(q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial l}{\partial q_i}(q) f_i(q,u)$. Ca şi în cazul problemei Lagrange, dacă u^* este control optimal pentru problema Bolza, atunci $(u^*, 0)$ este control optimal în problema (6.4).

Am văzut aşadar că studiul problemelor de control optimal se reduce la studiul mulţimior accesibile, mai precis la studiul acelor traiectorii care au capătul final pe frontiera mulţimii accesibile la acel moment.

6.2. Forma geometrică a principiului de maxim al lui Pontriaghin

În cele ce urmează considerăm ecuaţia controlată (6.1):

$$\begin{cases} \dot{q} = f(q,u) =: f^u(q) \\ q(0) =_0 \end{cases} \tag{6.5}$$

unde f verifică, în coordonate locale, ipotezele din paragraful precedent.

Pentru $u \in \mathcal{U}$ considerăm hamiltonianul $H^u := (f^u)^\#$ definit de (4.21).

TEOREMA 6.2.1. *Presupunem că pentru controlul admisibil $u^*(t), t \in [0,T]$, $q^{u^*}(T) \in \partial \mathcal{A}_{q_0}(T)$. Atunci există o curbă Lipschitz, netrivială, în fibratul cotangent, $\xi(t) \in T^*_{q^{u^*}(t)} M$, soluţie a ecuaţiei lui Hamilton (v. (4.20)):*

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = \overrightarrow{H}^{u^*(t)}(\xi(t)).$$

În plus, următoarea condiţie de maximalitate este satisfăcută:

$$\overrightarrow{H}^{u^*(t)}(\xi(t)) = \max_{u \in U} \overrightarrow{H}^u(\xi(t)).$$

Demonstraţie Ideea de demonstraţie este de a considera drept curbă $\xi(t)$ o curbă de covectori ortogonali în fiecare punct la frontiera mulţimii accesibile $\partial \mathcal{A}_{q_0}(t)$.

Pasul 1 Fie $\mathbf{T} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz continuă şi diferenţiabilă în 0 cu $\mathbf{T}(0) = 0$. Notăm cu $\mathbf{T}_0 = D\mathbf{T}(0)$ şi cu

$$\mathbb{R}^N_+ = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N | x_i \geq 0\}.$$

Demonstrăm că dacă $\mathbf{T}_0(\mathbb{R}^N_+) = \mathbb{R}^n$, atunci pentru orice vecinătate $\mathcal{V}$ a lui 0 în $\mathbb{R}^N$, $0 \in \text{int } \mathbf{T}(\mathcal{V} \cap \mathbb{R}^N_+)$.

Din convexitatea lui $\mathbb{R}^N_+$ rezultă că $\mathbf{T}_0|_{\text{int } \mathbb{R}^N_+}$ este surjectiv şi fie un $y \in \text{int } \mathbb{R}^N_+$ cu $\mathbf{T}_0(y) = 0$ şi $\delta > 0$ astfel încât $y + B_\delta \subset \text{int } \mathbb{R}^N_+$.

Se observă cu uşurinţă că se poate găsi un subspaţiu liniar $n-$dimensional $X \subset \mathbb{R}^N$ astfel încât $\mathbf{T}_0(X) = \mathbb{R}^n$ deci $\mathbf{T}_0|_X$ este inversabil. Fie $D = B_\delta \cap X$ şi pentru $\varepsilon > 0$ fie funcţiile continue $\mathbf{T}_\varepsilon : D \to \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{T}_\varepsilon(v) = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{T}(\varepsilon(y+v))$$

Se verifică cu uşurinţă că $\mathbf{T}_\varepsilon \to \mathbf{T}_0$ uniform pe $\overline{D}$ şi întrucât $0 \in \text{int } \mathbf{T}_0(D)$ rezultă că $0 \in \text{int } \mathbf{T}_\varepsilon(D)$ pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic sau, echivalent, $0 \in \text{int } \mathbf{T}(\varepsilon(y + B_\delta))$ ceea ce încheie demonstraţia pasului 1.

Pasul 2 Considerăm un control admisibil $u(t)$ şi expimăm punctul final al traiectoriei folosind a doua formă a formulei variaţiei constantelor (4.18):

$$\begin{aligned} q^u(T) &= q_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^T f^{u^*(t)} + (f^{u(t)} - f^{u^*(t)})dt = \\ &= q^{u^*}(T) \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^T (F_t^T)_*(f^{u(t)} - f^{u^*(t)})dt \end{aligned} \tag{6.6}$$

Notăm cu

$$g^{t,u} = (F_t^T)_*(f^u - f^{u^*(t)})$$

şi fie $\mathcal{L}$ mulţimea punctelor Lebesgue ale lui u^*. Amintim că punctele Lebesgue ale lui u^* sunt punctele t în care $\lim_{h\to 0} \int_t^{t+h} \|u^*(s) - u^*(t)\|/h = 0$. Teorema lui Lebesgue ne spune că pentru o funcţie integrabilă aproape toate punctele sunt puncte Lebesgue.

Presupunem că conul convex închis $\mathcal{W}$ generat de $\{g^{t,u}(y^{u^*}(T))|t \in \mathcal{L}, u \in U\}$ coincide cu întregul spaţiu tangent $T_{y^{u^*}(T)}M$. Demonstrăm că dacă se întâmplă acest lucru atunci în mod necesar $q_1 := q^{u^*}(T) \in \text{int } \mathcal{A}_{q_0}(T)$. Într-adevăr, se poate atunci găsi o mulţime finită de puncte $0 < t_1 < \ldots < t_N < T$ şi $u_1, \ldots, u_N \in U$ astfel încât $\mathcal{W}$ este generat de mulţimea finită $\{g^{t_i,u_i}|i = 1, \ldots, N\}$. Pentru $x = (x_1 \ldots x_N) \in \mathbb{R}_+^N$ considerăm controlul:

$$u^x(t) = \begin{cases} u_i, & t \in [t_i, t_i + x_i] \\ \\ u^*(t), & t \in [0,T] \setminus \cup_{i=1}^N [t_i, t_i + x_i] \end{cases}$$

Formula variaţiei constantelor (6.6) ne dă :

$$\begin{aligned} q^{u^x}(T) &= q_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^T f^{u^x(t)}dt = \\ &= q^{u^*}(T) \circ \overrightarrow{\exp} \int_{t_1}^{t_1+x_1} g^{t,u_1}dt \circ \cdots \circ \overrightarrow{\exp} \int_{t_N}^{t_N+x_N} g^{t,u_n}dt \end{aligned} \tag{6.7}$$

Considerăm acum aplicaţia:

$$\mathbf{T}(x_1, \ldots, x_N) = q^{u^x}(T), \quad x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}.$$

Se verifică cu uşurinţă că $\mathbf{T}$ este Lipschitz continuă, $\mathbf{T}(0) = q_1$ şi

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_i}|_{(0,\dots,0)} = g^{t_i,u_i}(y_1).$$

Ipotezele pasului 1 din demonstraţie sunt verificate şi, în consecinţă,

$$q_1 \in \text{int } \mathbf{T}(\mathcal{V} \cap \mathbb{R}^N_+)$$

pentru orice vecinătate $\mathcal{V}$ a lui 0 în $\mathbb{R}^N$. Întrucât u^x este control admisibil deducem că

$$q_1 \in \text{int } \mathcal{A}_{q_0}(T)$$

Pasul 3 Presupunem că $q^{u^*}(T) \in \partial\mathcal{A}_{q_0}(T)$. Deoarece $0 \in \partial\mathcal{W}$, există un hiperplan suport definit de $\xi(T) \in T^*_{q^{u^*}(T)}M$,$\xi(T) \neq 0$ astfel încât

$$(\xi(T), g^{T,u}(q^{u^*}(T))) \leq 0 \quad a.e.\ t \in [0,T], u \in U$$

Aceasta înseamnă exact că

$$[(F_t^T)^*\xi(T)](f^{u^*}(q^{u^*}(t))) \geq [(F_t^T)^*\xi(T)](f^u(q^u(t)))$$

Fie

$$\xi(t) = (F_t^T)^*\xi(T).$$

Condiţia de maximalitate este satisfăcută şi, din (4.22),

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = \overrightarrow{H}^{u^*(t)}(\xi(t)),$$

ceea ce încheie demonstraţia. ∎

6.3. Probleme de control optimal cu timp final liber

Din punctul de vedere geometric, în cazul problemelor Lagrange sau Bolza considerate în §6.1, dacă timpul final T este liber, concluzia este că pentru problemele echivalente (6.2), respectiv (6.4), perechea optimală $((u^*,0),(j^*,y^{u^*})$ satisface, pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic

$$(j^*(T), q^{u^*}(T)) \in \partial(\cup_{|T-t|<\varepsilon}\mathcal{A}_{(0,q_0)}(t)). \tag{6.8}$$

Are loc următorul principiu de maxim,în forma geometrică, pentru problemele de control cu timp liber:

TEOREMA 6.3.1. *Presupunem că pentru controlul admisibil $u^*(t), t \in [0,T]$,*

$$q^{u^*}(T) \in \partial(\cup_{|T-t|<\varepsilon}\mathcal{A}_{q_0}(t))$$

Atunci există o curbă Lipschitz, nenulă, în fibratul cotangent $\xi(t) \in T^*_{q^{u^*}(t)}M$ soluţie a ecuaţiei lui Hamilton

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = \overrightarrow{H}^{u^*(t)}(\xi(t))$$

şi următoarea condiţie de maximalitate este satisfăcută:

$$H^{u^*(t)}(\xi(t)) = \max_{u\in U} H^{u(t)}(\xi(t)). \tag{6.9}$$

În plus faţă de cazul timpului fixat are loc:

$$H^{u^*(t)}(\xi(t)) = 0 \quad a.p.t.\ t \in [0,T] \tag{6.10}$$

Demonstraţie Problema de control optimal cu timp liber se poate reduce la o problemă cu timp fixat considerând o reparametrizare a traiectoriilor sistemului iniţial şi introducând un control suplimentar legat de reparametrizarea timpului in felul următor:
Fie reparametrizarea timpului:

$$t = \gamma(s),\ \gamma' > 0.$$

Atunci soluţia $q^u(s) = q^u(\gamma(s))$ satisface

$$\frac{d}{ds}q^u(s) = \gamma'(s) f^{u(\gamma(s))}(q)$$

Sistemul modificat este

$$\begin{cases} q' = \varphi f^u(q) \quad u \in U, |\varphi - 1| < \dfrac{\varepsilon}{T} < 1 \\ \\ q(0) = q_0 \end{cases}$$

Controalele admisibile sunt funcţiile măsurabile, mărginite, de forma $v(t) = (\varphi(t), u(t)),\ |\varphi - 1| \leq \dfrac{\varepsilon}{T}$ iar soluţia corespunzătoare se notează cu $q^v(t)$. Notând cu $v^*(t) = (1, u^*(t))$ atunci , întrucât $q^{u^*}(T) \in \partial(\cup_{|T-t|<\varepsilon}\mathcal{A}_{q_0}(t))$, rezultă că $q^{v^*}(T) \in \partial\mathcal{A}_{q_0}(T)$ şi, în acest punct, principiul de maxim stabilit în cazul timpului fixat poate fi aplicat. Hamiltonianul este

$$H^v(\xi) = \varphi H^u(\xi),\ v = (\varphi, u)$$

Sistemul hamiltonian pentru H^{v^*} este acelaşi ca şi pentru H^{u^*}. Condiţia de maximalitate devine

$$H^{v^*}(\xi(t)) = H^{u^*(t)}(\xi(t)) = \max_{|\varphi-1|<\varepsilon T, u\in U} \varphi H^u(\xi(t))$$

de unde rezultă relaţiile (6.9), (6.10). ■

6.4. Principiul de maxim pentru problemele de control optimal

În aceast paragraf vom explicita principiul de maxim prezentat în §6.2 pentru diferitele probleme de control ce apar în practică, utilizând transformarea descrisă în §6.1. Considerăm din nou sistemul controlat (6.1), pentru simplitate în $M = \mathbb{R}^n$ şi notăm starea sistemului cu y iar derivata cu y':

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), u(t)) =: f^{u(t)}(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{6.11}$$

Problema Lagrange. Ne propunem să minimizăm funcţionala de cost

$$J(y, u) = \int_0^T L(y(t), u(t))dt$$

pentru y verificând (6.11) şi

$$y(T) = y_1.$$

Lagrangeanul L verifică ipoteza:

L, L_y sunt funcţii continue în ansamblul variabilelor (y, u).

Considerăm sistemul (6.3). Starea adjunctă este (ν, p), $\nu \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n$, hamiltonianul

$$H^{u,v}(j, y, \nu, p) = \nu(L(y, u) + v) + p \cdot f(y, u).$$

Presupunem că u^* este control optimal iar y^* este soluţia corespunzătoare controlului optimal $(u^*, 0)$ în problema de mulţimi accesibile asociată. Notăm cu $H^u(y, p) := H^{u,0}(j, y, \nu, p)$ pentru un ν fixat. Sistemul adjunct este

$$\begin{cases} \nu' = 0 \\ p' = -\dfrac{\partial H^{u,v}}{\partial y}(j, y, \nu, p) = -\dfrac{\partial H^u}{\partial y}(y, p) = -(f_y(y^*, u))^* p - \nu L_y(y^*, u) \end{cases} \tag{6.12}$$

Principiul de maxim ne spune că există (ν, p) soluţie netrivială a sistemului adjunct astfel încât

$$H^{u^*,0}(j^*, y^*, \nu, p) = \max_{u \in U, v \geq 0} H^{u,v}(j^*, y^*, \nu, p).$$

Cum $\nu = cst$ rezultă că maximul se poate atinge dacă şi numai dacă $\nu \leq 0$. Distingem două situaţii: $\nu = 0$ şi $\nu < 0$. Dacă $\nu = 0$ vom spune că problema este singulară. Dacă $\nu < 0$ problema se numeşte *normală* şi putem considera $\nu = -1$. Deci

$$H^{u^*} = \max_{u \in U} H^u(y^*, u^*).$$

Facem aici observaţia că principiul de maxim este util pentru determinarea controlului optimal în cazul normal, întrucât hamiltonianul depinde efectiv de L, care identifică de fapt problema de control.

Dacă presupunem că capătul final se mişcă liber pe o subvarietate M_1, apar în plus condiţiile de transversalitate :

$$p(T) \perp M_1 \text{ în } y^*(T).$$

Vom discuta condiţiile de transversalitate în §6.5.

Problema Bolza. Ne propunem să minimizăm funcţionala de cost

$$J(y,u)=\int_0^T L(y(t),u(t))dt+l(y(T)),$$

pentru y verificând (6.11) şi $y(T)$ liber. l este o funcţie de clasă C^2. Aceast grad de regularitate sporit este util numai pentru a obţine principiul de maxim reducând problema la o problemă Lagrange însa forma principiului de maxim rămâne valabilă şi dacă l este numai de clasă C^1.

Am văzut în §6.1 cum o problemă Bolza se reduce formal la o problemă Lagrange cu capătul final liber. Aplicăm principiul de maxim pentru sistemul extins (6.4). Presupunând că u^* este control optimal, există perechea $(\nu,\xi)\neq(0,0)$ care verifică sistemul adjunct, cu hamiltonianul $\tilde{H}^{u,v}$ definit în mod uzual:

$$\begin{cases} \nu' &= 0\\ \xi' &= -\dfrac{\partial\tilde{H}^{u^*,0}}{\partial y}(j,y,\nu,\xi)=\\ &= -(f_y(y^*,u^*))^*\xi-\nu L_y(y^*,u)-\nu\dfrac{\partial}{\partial y}(\sum_{i=1}^n\dfrac{\partial l}{\partial q_i}(q)f_i(q,u)) \end{cases}$$

şi condiţia de transversalitate

$$\xi(T)=0.$$

În plus, este verificată condiţia de maximalitate

$$\tilde{H}^{u^*,0}(y^*(t),\xi(t))=\max_{u\in U,v\geq 0}\tilde{H}^{u,v}(y^*(t),\xi(t)).$$

Dacă notăm cu

$$p(t)=\xi(t)+\nu\nabla l(y^*(t))$$

şi cu

$$H^u(t,y,p)=(p,f(y,u))+\nu L(y,u)$$

obţinem că există perechea (ν,p) netrivială astfel încât este verificat sistemul adjunct obişnuit

$$\begin{cases} \nu' &= 0\\ p' &= -\dfrac{\partial H^{u^*}}{\partial y}(y^*,p)=-f_y^*(y^*,u^*)p-\nu L_y(y^*,u) \end{cases} \tag{6.13}$$

împreună cu condiţia de transversalitate

$$p(T)=\nu\nabla l(y^*(T)).$$

Dacă presupunem că $y(T)$ este liber să se mişte pe o subvarietate diferenţiabilă M_1 condiţia de transversalitate devine

$$p(T)-\nu\nabla l(y^*(T))\perp M_1 \text{ în } y^*(T).$$

Probleme cu timpul final liber. Considerăm una din problemele de control anterioare pentru ecuaţia autonomă (6.11) dar cu timpul final liber. Apare deci o necunoscută în plus, T, pentru care suplimentăm sistemul hamiltonian determinat anterior ((6.11),(6.12), respectiv (6.11),(6.13))cu condiţia (6.10) determinată în §6.3:

$$H^{u^*}(y^*(t), p(t)) \equiv 0.$$

Probleme neautonome. Considerăm acum cazul în care funcţiile ce intervin în problemă, f, L, depind explicit de timpul t. Pentru început considerăm timpul final T fixat. Adăugăm următoarea ipoteză de regularitate:

f, f_t, L, L_t continue în raport cu ansamblul variabilelor (t, y, u).

Ca de obicei, se transformă sistemul într-un sistem autonom prin introducerea unei variabile suplimentare $y_{n+1} = t$. Sistemul de stare (6.11) se completează cu ecuaţia

$$y'_{n+1} = 1,\ y_{n+1}(0) = 0.$$

În sistemul de stare apare o variabilă suplimetară, p_{n+1}. Hamiltonianul sistemului este

$$\bar{H}^u(y_{n+1}, y, p, p_{n+1}) = p_{n+1} + H^u(y_{n+1}, y, p).$$

Sistemul hamiltonian se suplimentează aşadar cu ecuaţia

$$p'_{n+1} = -\frac{\partial}{\partial t} H^{u^*}(t, y, p).$$

Condiţia de maximizare rămâne aceeaşi ca în cazul autonom

$$H^{u^*}(t, y^*, p) = \max_{u \in U} H^u(t, y^*, p)$$

iar perechea (ν, p) este netrivială. Facem observaţia că din principiul de maxim pentru sistemul autonom se obţine de fapt că tripletul (ν, y, y_{n+1}) este netrivial, însă, întrucât y_{n+1} este liber (are o valoare bine determinată obţinută în urma integrării ecuaţiei, dar nu precizată a priori) vom lua

$$p_{n+1}(T) = 0$$

şi se vede că dacă $(\nu, p) \equiv (0, 0)$ atunci în mod necesar $p_{n+1} \equiv 0$.

Dacă timpul final T este liber, atunci variabila adjunctă p_{n+1} intervine explicit şi are loc condiţia de anulare a hamiltonianului $\bar{H}$:

$$\bar{H}^{u^*}(t, y^*, p, p_{n+1}) = p_{n+1} + H^{u^*}(t, y^*, p) \equiv 0.$$

Dacă, în plus, capătul final $y(T)$ este liber să se mişte pe o subvarietate M_1, atunci se suplimentează sistemul cu condiţiile de transversalitate corespunzătoare.

6.5. Legătura dintre principiul de maxim şi principiul programării dinamice

În cele ce urmează vom pune în evidenţă legătura dintre principiul de maxim al lui Pontriaghin şi ecuaţia programării dinamice a lui Bellman.

Considerăm problema de control optimal de tip Bolza care a fost studiată în §6.4. Principiul de maxim pentru această problemă ne spune că, dacă u^* este un control optimal, atunci există $\nu \in \{0, -1\}$ şi $p(t)$, $(\nu, p) \neq (0, 0)$, astfel încât (y, p) verifică sistemul hamiltonian

$$\text{(6.14)} \qquad \begin{cases} y' = f(t, y^*, u^*) = \dfrac{\partial}{\partial p} H^{u^*}(t, y^*, p) \\ p' = -(p, f_y(t, y^*, u^*)) + \nu L_y(t, y^*, u^*) = -\dfrac{\partial}{\partial y} H^{u^*}(t, y^*, p) \\ p(T) = -\nabla l(y^*(T)) \end{cases}$$

unde $H^u(t, y, p) = (p, f(t, y, u)) + \nu L$ şi

$$H^{u^*(t)}(t, y^*(t), p(t)) = \max_{u \in U} H^u(t, y*(t), p(t)).$$

În §3.3, teorema 3.3.1 s-a arătat că funcţia valoare ψ, în cazul în care este de clasă C^1, verifică ecuaţia programării dinamice (3.14):

$$\text{(6.15)} \qquad \begin{cases} \psi_t - H(t, x, \psi_x) = 0 \\ \psi(T, x) = l(x) \end{cases}$$

unde $H(t, x, p) = \max_u H^u(t, x, -p)$. Notând cu $S = -\psi$, obţinem

$$S_t + H^{u^*}(t, x, S_x) = 0$$

iar aceasta este exact ecuaţia Hamilton-Jacobi (v.§2.3) ce corespunde sistemului hamiltonian (6.14) ce apare în principiul de maxim al lui Pontriaghin.

Următoarea teoremă stabileşte principiul de maxim pentru problema de control considerată, făcând apel la ecuaţia lui Bellman. Ipotezele considerate sunt, desigur, restrictive însă rezultatul pune în lumină legătura dintre cele două ramuri ale teoriei controlului optimal, fiind un analog al teoremei lui Jacobi din Calculul variaţiilor. Această problemă, în ipoteze generale, a fost studiată în [**15**].

Teorema 6.5.1. *Presupunem că u^* este control optimal iar funcţia valoare ψ este de clasă C^2. Atunci problema de control optimal considerată este normală. În plus, dacă notăm cu*

$$\text{(6.16)} \qquad p = -\psi_x(t, y^*(t))$$

atunci (y^*, p) satisface (6.14) *cu $\nu = -1$.*

Demonstraţie Cum $\psi \in C^1$, din teorema 3.3.1, aceasta este soluţie pentru (6.15). Deci

$$\text{(6.17)} \qquad \frac{d}{dt} p(t) = -\psi_{tx}(t, y^*(t)) - \psi_{xx}(t, y^*(t)) f(t, y^*, u^*).$$

Pe de altă parte, din principiul programării dinamice,

$$\frac{d}{dt}\psi(t, y^*(t)) = -L(t, y^*(t), u^*(t)) =$$

$$= \psi_t(t, y^*(t)) + (\psi_x(t, y^*(t)), f(t, y^*(t), u^*(t))).$$

Aceasta, împreună cu ecuaţia lui Bellman satisfăcută de ψ, ne spune că perechea $(y^*(t), u^*(t))$ realizează minimul pentru funcţia $(x, u) \to \psi_t(t, x) + (\psi_x(t, x), f(t, x, u)) + L(t, x, u)$. Rezultă că derivata în raport cu x calculată în $(t, y^*(t), u^*(t))$ este 0 adică

$$\psi_{xt}(t, y^*(t)) + \psi_{xx}(t, y^*(t))f(t, y^*(t), u^*(t)) +$$

$$+(\psi_x(t, y^*(t)), f_y(t, y^*(t), u^*(t)) + L_y(t, y^*(t), u^*(t)) = 0,$$

ceea ce, împreună cu (6.17) încheie demonstraţia. ■

Condiţii de transversalitate.

Dacă în problema de control optimal de tip Bolza considerată anterior avem o restricţie suplimentară asupra capătului final:

$$y(T) \in M_1$$

unde M_1 este o subvarietate diferenţiabilă a spaţiului stărilor sistemului, atunci, în principiul de maxim al lui Pontriaghin, condiţia

$$p(T) = -\nabla l(y^*(t))$$

este înlocuită cu condiţia de transversalitate

$$p(T) + \nabla l(y^*(T)) \text{ ortogonal pe } M_1.$$

Nu vom demonstra acest lucru în cazul general însă facem observaţia că funcţia valoare ψ verifică

$$\psi(T, x) = l(x), \ x \in M_1$$

de unde, presupunând că funcţia valoare este de clasă C^2, rezultă că

$$\nabla\psi(T, x) - \nabla l(y^*(T)) \perp M_1 \text{ în } y^*(T)$$

deci, din (6.16), obţinem imediat condiţia de transversalitate.

Cazul unei probleme Lagrange cu timpul final $y(T) \in M_1$ este caz particular al problemei Bolza cu $l \equiv 1$ iar condiţia de transversalitate devine

$$p(T) \perp M_1 \text{ în } y^*(T).$$

6.6. Probleme de control optimal - exemple

EXEMPLUL 6.6.1. *Oprirea unui tren în staţie.* Considerăm mişcarea unui tren. Controlul se face prin intermediul forţei aplicate, iar scopul este de a aduce trenul în staţie şi de a-l opri. Sistemul este modelat de ecuaţia

$$my'' = u,$$

unde m reprezintă masa, y poziţia şi u forţa aplicată. Scrisă ca un sistem de ordinul I (notând cu $y_1 = my$) ecuaţia ia forma:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = u. \end{cases} \tag{6.18}$$

Starea sistemului este $y = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$, controlul $u \in \mathbb{R}$ reprezintă forţa care este aplicată (forţa motoare sau forţa de frânare), starea iniţială este $y(0) = y_0 = (y_1^0, y_2^0)^T$ iar starea finală $y(T) = (0,0)^T$.

Cost optimal. Se pune problema opririi trenului cu consum minim de energie. Considerăm pentru această situaţie funcţionala de cost

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\int_0^T u^2 dt$$

şi căutăm soluţia problemei corespunzătoare de control optimal. Notăm cu $p = (p_1, p_2)^T$ starea dual̆a. Hamiltonianul sistemului este

$$H^u(y,p) = p_1 y_2 + p_2 u + \frac{\nu}{2}u^2$$

Sistemul dual este

$$\begin{cases} p_1' = 0 \\ p_2' = -p_1 \end{cases}$$

Principiul de maxim ne spune că

$$H^{u^*}(y^*, p^*) = \max_{u \in \mathbb{R}} H^u(y^*, p^*) \tag{6.19}$$

Pentru început ne convingem că problema este normală. Dacă ν ar fi 0, atunci starea dual̆a ar fi netrivială $p_2 \neq 0$. Dar atunci $\max_{u\in\mathbb{R}} p_2 u$ nu se atinge. Aşadar putem considera $\nu = -1$ iar maximul în (6.19) se atinge în $u = p_2$, deci hamiltonianul maximizat este

$$H_{max} = p_1 y_2 + \frac{1}{2}p_2^2.$$

Pentru a afla traiectoriile optimale trebuie să rezolvăm sistemul hamiltonian corespunzător lui H_{max}:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = p_2 \\ p_1' = p_2 \\ p_2' = -p_1 \end{cases}$$

cu condiţiile la limită:

$$y_1(0) = y_1^0,\ y_2(0) = y_2^0,\ y_1(T) = 0,\ y_1'(T) = 0\,.$$

Sistemul acesta este un sistem liniar şi se integrează cu uşurinţă ($y_1^{IV} = 0$). Cele patru constante de integrare se determină în mod unic din condiţiile la limită. Controlul optimal este apoi determinat prin formula

$$u^*(t) = p_2(t).$$

Timp optimal. Starea finală este $y_1(T) = 0, y_2(T) = 0$ şi scopul este de a o atinge în timp minim. Pentru problema de timp optimal vom considera $U = [-1, 1]$. Existenţa soluţiei rezultă din teorema 3.6.1 iar unicitatea este consecinţa aceluiaşi rezultat, deoarece ipoteza (3.43) este verificată. Hamiltonianul sistemului este:

$$H^u(y, p) = p_1 y_2 + p_2 u,$$

iar hamiltonianul maximizat devine

$$H_{max}(y, p) = \max_{|u| \leq 1} H^u(y, p) = p_1 y_2 + |p_2|.$$

Hamiltonianul maximizat nu mai este de clasă C^2, însă putem în continuare obţine informaţii din principiul de maxim, care în acest caz spune că

$$H^{u^*}(y^*, p^*) = \max_{|u| \leq 1} H^u(y^*, p^*) \geq 0,$$

unde $p^* = (p_1, p_2)$ este starea adjunctă în raport cu hamiltonianul H^{u^*}:

$$\begin{cases} p_1' = 0 \\ p_2' = -p_1. \end{cases} \tag{6.20}$$

Deci

$$u^*(t) = \text{sign}\,(p_2(t)) = \text{sign}\,(\alpha t + \beta).$$

unde α, β sunt constante de integrare pentru sistemul adjunct. Din formula pentru u^* rezultă că acesta ia numai valorile ± 1 şi are cel mult un punct de comutare. Traiectoriile care ajung în origine fără schimbarea controlului sunt soluţiile sistemului cu $u = 1$ sau $u = -1$. Traiectoriile respective sunt semiparabolele de ecuaţii

$$y_1 = \frac{y_2^2}{2},\ y_2 < 0;\ y_1 = -\frac{y_2^2}{2},\ y_2 > 0.$$

Dacă un punct (y_1^0, y_2^0) nu aparţine uneia dintre cele două semiparabole, atunci numai o traiectorie, corespunzând controlului $u = 1$ sau $u = -1$, va trece prin acest punct şi va întâlni una dintre cele două semiparabole. Aceasta este traiectoria de timp optimal care continuă pâna în origine cu porţiunea din semiparabola corespunzătoare.

Exemplul 6.6.2. *Problema poziţionării sau problema aselenizării line.* Ne propunem să poziţionăm o navă, în mişcare pe direcţie verticală în câmp gravitaţional şi asupra căreia acţionăm cu o forţă $u \in U = [-F, F]$. Ecuaţia ce modelează mişcarea este

$$My'' = u - Mg \tag{6.21}$$

unde M reprezintă masa navei iar g acceleraţia gravitaţională. Sistemul de stare, notând cu $y_1 = My$, devine

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -Mg + u \end{cases} \tag{6.22}$$

Ne propunem determinarea unui control admisibil astfel încât la momentul T să avem $y_1(T) = 0,\ y_2(T) = 0$, iar T să fie minim cu această proprietate. Putem să renotăm controlul şi considerăm noul control

$$\tilde{u} = u - Mg$$

cu $\tilde{u} \in [-Mg - F, -Mg + F]$. Sistemul (6.22) este de aceeaşi formă cu sistemul (6.18), însă, spre deosebire de problema opririi unui tren în staţie, apare restricţia de stare

$$y_1 \geq 0.$$

În plus este necesară condiţia ca

$$F > Mg,$$

altminteri acceleraţia mobilului este întotdeauna negativă şi deci problema nu are soluţie.

Aşadar, în problema de timp optimal avem aceleaşi soluţii ca şi în cazul opririi unui tren în staţie (cu deosebirea că parabolele respective ce compun traiectoria optimală corespund controalelor $\tilde{u} = -F - Mg$, respectiv $\tilde{u} = -F + Mg$) însă vom reţine drept acceptabilie numai soluţiile care rămân în semiplanul $y_1 \geq 0$. Dacă soluţia în semiplanul $y_1 < 0$, aceasta semnifică în situaţia de faţă că nu putem poziţiona lin mobilul: acesta va atinge solul cu viteză nenulă.

Poziţionarea cu optimizarea timpului şi a consumului de combustibil. Presupunem că consumul de combustibil este proporţional cu forţa aplicată: $c = \mu u$ şi ne propunem să optimizăm simultan consumul şi timpul de poziţionare T. Funcţionala de cost pe care o considerăm în acest caz este

$$J(y, u) = \int_0^T (k + |u|)dt.$$

unde k este o constantă pozitivă ce exprimă ponderea pe care o are optimizarea timpului în raport cu optimizarea consumului de combustibil. Avem deci de rezolvat o problemă Lagrange cu timpul final liber. Hamiltonianul sistemului este:

$$H^u(y, p) = p_1 y_2 + p_2(u - Mg) + \nu(|u| + k)$$

unde $p = (p_1, p_2)^T$ reprezintă starea adjunctă iar $\nu \in \{-1, 0\}$. Dacă am considera $\nu = 0$ am obţine în final traiectoriile ce corespund problemei de timp optimal. Vom considera aşadar $\nu = -1$. În cele din urmă se poate verifica că costul obţinut este mai mic decât de-a lungul traiectoriei din cazul timpului optimal. Principiul de maxim al lui Pontriaghin pentru problemele

cu timp liber ne spune că există o soluţie (y^*, p) a sistemului cu hamiltonianul H^{u^*} (u^* controlul optimal) astfel încât

$$H^{u^*}(y^*, p) = \max_{|u| \leq F} H^u(y^*, p) \equiv 0.$$

Un calcul elementar ne arată că acest maxim se atinge în

$$u^* = \begin{cases} F & \text{pentru } p_2 > 1 \\ 0 & \text{pentru } -1 < p_2 < 1 \\ -F & \text{pentru } p_2 < -1 \end{cases} .$$

Sistemul adjunct este (6.20) deci soluţia are forma $p_1 = \alpha, p_2 = -\alpha t + \beta$. Dacă $\alpha \neq 0$ rezultă că controlul va lua valorile $(+F, 0, -F)$ sau $(-F, 0, F)$ în această ordine (sau o parte a acesteor succesiuni însă în niciun caz nu va comuta de la F la $-F$ sau invers, ca în cazul problemei de timp optimal). De asemenea nu vom putea ajunge în $(0, 0)$ cu controlul $u = -F$ deoarece aceasta ar însemna că $y_2(t) > 0$ pentru $t < T$ suficient de apropiat de T, deci $y_1(t) < 0$. Rezultă că numai succesiunea $(-F, 0, F)$ este posibilă.

Să presupunem pentru exemplificare că $y_1(0) = y_1^0 > 0, y_2(0) = 0$. Să observăm că $\alpha \neq 0$. Într-adevăr, dacă $\alpha = 0$, atunci $p_1 \equiv 0$, $p_2 \equiv \beta$ iar $H^u(y, p) = \beta(u - Mg) - (|u| + k)$. Dacă $\beta > 0$, atunci maximul hamiltonianului este $\max_{|u| \leq F} = -\beta Mg - k < 0$, contradicţie. Dacă $\beta < 0$, atunci maximul se atinge pentru u negativ, deci controlul optimal păstrează semn negativ, ceea ce ar însemna că ajungem în $(0, 0)$ cu acceleraţie negativă. Din acelaşi motiv controlul iniţial nu poate fi 0, deci întreaga succesiune $(-F, 0, F)$ este parcursă de controlul optimal u^*. Cum perechea (α, β) este determinată pâna la o constantă multiplicativă, putem considera $\alpha = 1$ şi $\beta < -1$. Necunoscutele sunt deci β şi timpul final T, care se determină din condiţia de anulare a hamiltonianului şi datele iniţială şi finală pentru (y_1, y_2). Lăsăm ca exerciţiu acest calcul, precum şi determinarea momentelor de comutare.

Poziţionarea cu variaţia masei datorată consumului de combustibil. Dacă ţinem cont de faptul că masa navei variază ca urmare a consumului de combustibil, trebuie să suplimentăm ecuaţia (6.21) cu ecuaţia

$$M' = -\mu|u|$$

şi restricţia de stare $M \geq \widetilde{M}$, $\widetilde{M}$ fiind masa vehiculului fără combustibil. Cu $y_1 = y$ şi considerând numai controale pozitive $u \in U = [0, F]$, obţinem sistemul de stare

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -g + \dfrac{u}{M} \\ M' = -\mu u \end{cases} \tag{6.23}$$

Ne propunem poziţionarea lină cu consum minim de combustibil deci avem o problemă de tip Mayer cu funcţionala de minimizat

$$J(u, (y_1, y_2, M)) = -M(T)$$

şi cu timp final liber. Condiţiile la capete care se impun sunt:

$$y_1(0) = y_1^0 > 0, y_2(0) = 0, y_1(T) = 0, y_2(T) = 0.$$

Notăm cu $y = (y_1, y_2, M)$, $p = p_1, p_2, p_3$. Hamiltonianul sistemului este

$$H^u(y, p) = p_1 y_2 + p_2(M^{-1}u - g) - p_3 \mu u.$$

Sistemul adjunct este

$$\begin{cases} p_1' = 0 \\ p_2' = -p_1 \\ p_3' = \dfrac{up_2}{M^2} \end{cases}$$

Condiţia de transversalitate care se adaugă este

$$p_3(T) = 1$$

şi, întrucât avem o problemă cu timpul final liber,

$$H^{u^*}(y^*, p) = \max_{u \in U} H^u(y^*, p) \equiv 0.$$

Condiţia de maximizare a hamiltonianului ne dă o formulă pentru controlul optimal în funcţie de starea adjunctă:

$$u^* = \begin{cases} 0 & \text{dacă } p_2 M^{-1} - \mu p_3 < 0 \\ F & \text{dacă } p_2 M^{-1} - \mu p_3 > 0 \end{cases}$$

Funcţia $h(t) = p_2(t)M^{-1}(t) - \mu p_3(t)$ este monotonă deoarece un calcul simplu ne arată că $h'(t) = -\dfrac{p_1(t)}{M(t)}$. Punctele de comutare ale controlului optimal u^* sunt zerourile funcţiei g. Dacă $p_1 \neq 0$, atunci funcţia h este strict monotonă şi deci controlul u^* are cel mult un punct de comutare. Dacă $p_1 \equiv 0$ şi funcţia h s-ar anula pe un întreg interval deschis, atunci pe acest interval ar rezulta, din condiţia de anulare a hamiltonianului, că $p_2 = 0$ deci pe $[0, T]$ are loc $p_2 \equiv 0$ şi $p_3 \equiv 1$. Ar rezulta că $u^* \equiv 0$, absurd. Aşadar, $p_1 \neq 0$ şi controlul u^* are cel mult un punct de comutare, luând forma

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & t \leq \bar{t} \\ F & \bar{t} < t \leq T. \end{cases}$$

Necunoscutele sunt în acest moment $\bar{t}, T$ pe care le determinăm integrând sistemul şi impunând condiţia ca $y_1(T) = 0, y_2(T) = 0$. Astfel, soluţia are expresia:
Pentru $0 \leq t \leq \bar{t}$:

$$M(t) = M_0,\ y_2(t) = -gt,\ y_1(t) = -\frac{gt^2}{2} + y_1^0.$$

Pentru $\bar{t} \leq t \leq T$:

$$M(t) = M_0 - \mu F(t - \bar{t}), y_2(t) = -gt - \frac{1}{\mu} \ln \frac{M_0 - \mu F(t - \bar{t})}{M_0},$$

$$y_1(t) = y_1^0 - \frac{gt^2}{2} + \frac{M_0 - \mu F(t - \bar{t})}{\mu^2 F} \ln \frac{M_0 - \mu F(t - \bar{t})}{M_0} + \frac{t - \bar{t}}{\mu}$$

Rezolvarea sistemului $y_1(T) = 0, y_2(T) = 0$ folosind expresiile determinate mai sus conduce la un sistem implicit în necunoscutele $(\bar{t}, T)$. Lăsăm ca exerciţiu studiul acestui sistem şi determinarea condiţiilor de compatibilitate care se impun (intuitiv, o masă de combustibil mică în raport cu înălţimea iniţială y_1^0 nu va permite poziţionarea lină a mobilului).

EXEMPLUL 6.6.3. *Oscilatorul armonic controlat.* Considerăm un oscilator armonic asupra căruia acţionăm cu o forţă u. Acest sistem este modelat de ecuaţia

$$my'' = -ky + u$$

unde m este masa, k constanta de elasticitate, y reprezintă poziţia iar $u \in \mathbb{R}$ controlul. Transformăm ecuaţia într-un sistem de ordinul I şi, rescalând şi considerând constantele ce intervin egale cu 1, obţinem sistemul liniar controlat:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 + u \end{cases} \tag{6.24}$$

Scopul este de a aduce oscilatorul în starea de repaus în timpul T dat, cunoscând starea iniţială (y_1^0, y_2^0).

Control optimal pentru oscilatorul armonic. Ne propunem să aducem sistemul în starea de repaus cu consum minim de energie dată prin funcţionala de cost

$$J(y, u) = \frac{1}{2} \int_0^T u^2 dt.$$

În primul rând se observă că sistemul este controlabil. Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, operatorul de control $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ deci matricea Kalman este nesingulară:

$$[A|B] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Existenţa şi unicitatea controlului optimal u^* pot fi obţinute printr-un argument asemănător celui folosit în demonstraţia teoremei 3.4.1. Hamiltonianul este

$$H^u(y, p) = p_1 y_2 - p_2 y_1 + p_2 u + \frac{1}{2} \nu u^2$$

iar starea adjunctă $p = (p_1, p_2)$ verifică sistemul

$$\begin{cases} p_1' = p_2 \\ p_2' = -p_1. \end{cases}$$

Principiul de maxim al lui Pontriaghin ne spune

$$H^{u^*}(y^*, p^*) = \max_u H^u(y^*, p^*)$$

iar perechea $(p, \nu) \neq (0, 0)$. Dacă $\nu = 0$ atunci maximul se poate atinge numai dacă $p_2 = 0$, caz în care şi p_1 ar fi nul. Deci problema este normală

şi putem considera $\nu = -1$. În acest caz controlul optimal se exprimă în funcţie de starea duală

$$u^*(t) = p_2(t) = a\sin(t+b)$$

unde a, b sunt constante de integrare. Aşadar, pentru a găsi controlul optimal rezolvăm sistemul iniţial cu controlul de forma dată:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 + a\sin(t+b) \end{cases}$$

şi determinăm cele patru constante (a, b şi celelalte două constante de integrare) din condiţiile la limită $y(0) = (y_1^0, y_2^0), y(T) = (0,0)$.

Timp optimal. Pentru problema de timp optimal vom considera o mulţime mărginită şi convexă de controale $U = \{u \in \mathbb{R} : |u| \leq 1\}$. Existenţa şi unicitatea soluţiei problemei de timp optimal rezultă din teorema 3.6.1. Hamiltonianul sistemului este

$$H^u(y,p) = p_1 y_2 - p_2 y_1 + p_2 u$$

iar starea adjunctă verifică sistemul

$$\begin{cases} p_1' = p_2 \\ p_2' = -p_1. \end{cases}$$

cu soluţia generală

$$p_1(t) = -a\cos(t+b), p_2(t) = a\sin(t+b),$$

a, b constante cu $a \neq 0$ deoarece $p \neq (0,0)$. Din principiul de maxim, hamiltonianul se maximizează de-a lungul traiectoriei optimale, deci

$$p_2(t)u^*(t) = \max_{|u|\leq 1} p_2(t)u.$$

Rezultă aşadar că

$$u^*(t) = \text{sign } (a\sin(t+b)).$$

Din forma controlului optimal rezultă că acesta ia alternativ valorile ± 1 cu un număr finit de schimbări de semn la intervale de timp de π unităţi (mai puţin eventual la ultima schimbare). Soluţiile sistemului cu controlul constant $u = 1$ sau $u = -1$ verifică respectiv sistemul

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \pm 1 \end{cases}$$

Traiectoriile sunt cercuri cu centrele în $(1,0)$, respectiv $(-1,0)$. Traiectoriile optimale care ajung direct în origine fără schimbarea controlului sunt semicercurile de ecuaţii:

$$(y_1-1)^2 + y_2^2 = 1,\ y_2 \leq 0,\ u = 1; \quad (y_1+1)^2 + y_2^2 = 1,\ y_2 \geq 0,\ u = -1.$$

parcurse în sens orar. Celelalte traiectorii optimale sunt formate din succesiuni finite de arce de cerc parcurse în sens orar, cu centrele în $(1,0)$,

respectiv $(-1,0)$ (alternativ), care, cu excepţia eventual a primului şi a ultimului arc, sunt semicercuri. Punctele de comutare a controlului se află la intersecţia cu semicercurile de ecuaţii:

$$(y_1-(2k+1))^2+y_2^2=1,\ y_2\le 0;\quad (y_1+(2k+1))^2+y_2^2=1,\ y_2\ge 0,\ k\ge 1.$$

EXEMPLUL 6.6.4. *O problemă de urmărire 1-dimensională.* O maşină de poliţie ce staţionează este depăşită de un autovehicul ce circulă cu viteză $v=1$. Aceasta porneşte în urmărire. Scopul este de a ajunge maşina şi de a continua apoi mişcarea alături de aceasta. Sistemul de stare pentru prima maşină este (v. exemplul 6.6.1)

$$\begin{cases} y_1'=y_2\\ y_2'=u, \end{cases}$$

iar controlul u este căutat astfel încât la momentul atingerii ţintei

$$y_1(T)=T, y_2(T)=1.$$

Funcţionala pe care ne propunem să o minimizăm ţine cont atât de timpul necesar, cât şi de energia cheltuită şi o alegem de forma

$$J(y,u)=\int_0^T(1+\frac{1}{2}u^2)dt.$$

Introducem o variabilă de stare suplimentară $y_3=t$ şi ecuaţia satisfăcută de aceasta

$$y_3'=0.$$

Hamiltonianul sistemului este

$$H^u(y,p)=p_1y_2+p_2u-(1+\frac{1}{2}u^2).$$

Sistemul adjunct corespunzător controlului optimal u^* este

$$\begin{cases} p_1'=0\\ p_2'=-p_1\\ p_3'=0 \end{cases}$$

iar condiţiile de transversalitate în $t=T$:

$$\begin{pmatrix} p_1(T)\\ p_2(T)\\ p_3(T)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\\ \beta\\ -\alpha\end{pmatrix},$$

cu α,β constante. Soluţia sistemului adjunct este $p_1(t)=\alpha, p_2(t)=-\alpha t+\beta-\alpha T$, $p_3(T)=-\alpha$. Condiţia de maximizare a hamiltonianului de-a lungul traiectoriei optimale ne dă forma controlului optimal (am notat cu $B=\beta-\alpha T$):

$$u^*(t)=p_2(t)=-\alpha t+B.$$

Integrăm acum sistemul de stare cu controlul optimal obţinut şi obţinem

$$y_1(t)=-\frac{\alpha t^3}{6}+\frac{Bt^2}{2}.$$

Condiţiile finale împreună cu anularea hamiltonianului ne dau sistemul

$$\begin{cases} -\dfrac{\alpha T^3}{6} + \dfrac{BT^2}{2} = T \\ -\dfrac{\alpha T^2}{2} + BT = 1 \\ \dfrac{B^2}{2} - \alpha - 1 = 0 \end{cases}$$

care rezolvat ne dă valorile pentru α, B, T.

Index

brahistocrona, 13, 17

câmp vectorial
  complet, 60
  hamiltonian, 69
  neautonom, 59
catenara, 22
cicloida, 18
condiţii
  de transversalitate, 34, 89
  necesară, 1
  necesară, Jacobi, 19, 20, 24
  necesară, Legendre, 2, 20, 24
  suficiente de minim local, 24
  Weierstrass-Erdmann, 17, 35
control, 4
  admisibil, 4, 5
  bang-bang, 80
  feedback, 4, 48
  optimal, 4, 5, 79
controlabilitate
  aproximativă, 4
  exactă, 4

derivare, 62
distribuţie, 77

ecuaţia
  a doua a lui Euler, 19, 24
  Euler-Lagrange, 2, 23, 29
  Euler-Lagrange în $\mathbb{R}^n$, 23
  Hamilton, 69
  Hamilton-Jacobi, 36
  Hamilton-Jacobi-Bellman, 48
  programării dinamice, 48
  Riccati, 25
  Riccati algebrică, 54
  Riccati diferenţială, 51
Exemple
  Atracţia de către două mase fixe egale, 14, 38
  Distanţa dintre două curbe, 34
  Geodezicele unei varietăţi riemanniene, 15, 25
  Mecanica lagrangeană, 13, 27
  Mişcarea în câmp de forţe central, 14, 27
  O problemă de urmărire, 97
  Oprirea unui tren în staţie, 90
  Oscilatorul armonic controlat, 95
  Problema brahistocronei, 13, 17
  Problema poziţionării line, 91
  Suprafaţa minimă de rotaţie, 12, 22
exponenţiala cronologică
  dreapta, 62
  stânga, 65
extrem local slab, 22
extremală, 1, 16, 23, 34

flux, 60
  hamiltonian, 69
forma Lax, 31
formula
  Cartan, 67
  variaţiei constantelor, 67
funcţie
  generatoare, 32
  integrabilă, 64
  slab măsurabilă, 64
  tare măsurabilă, 64

geodezică, 15, 25

hamiltonian, 29, 69

inegalitate de observabilitate, 43
integrală primă, 31
integrala Bochner, 64

lagrangean, 1, 11, 13
  regulat, 17, 23
lift hamiltonian, 71

matrice
  de controlabilitate, 43
  Kalman, 44
metoda variaţiei constantelor, 67
metrică riemanniană, 15
modul
  finit generat, 76
  local finit generat, 76
mulţime accesibilă, 79

orbita, 73

paranteza Poisson, 31, 70
principiul de maxim, 47
principiul minimei acţiuni, 14
problema
  Bolza, 80
  de sinteză, 48
  Lagrange, 80
  Mayer, 80
  normală, 85
  singulară, 85
  timp optimal, 80
punct conjugat, 19, 24

reprezentare
  câmpuri vectoriale, 61
  difeomorfisme, 61
  puncte, 61
  vectori tangenţi, 61

sistem
  aproximativ controlabil, 4
  controlabil, 4
  cu buclă închisă, 4, 48
  hamiltonian, 30, 69
  nul controlabil, 4
  stabilizabil, 4
sistem liniar
  aproximativ controlabil, 41
  complet stabilizabil, 53
  controlat, 41
  controlat, clasificare, 45
  echivalenţă, 45
  nul controlabil, 41
  stabilizabil, 53
spaţiul controalelor, 4
stabilizare, 4
starea sistemului, 4
subdiferenţiala, 30

teorema
  bang-bang, 58
  Chow-Rashevsky, 75
  de descompunere Kalman, 45
  Frobenius, 77
  Jacobi, 36
  Kalman, 44
  Nagano-Sussmann, 73
  Noether, 26
  orbitei, 73
transformare
  canonică, 32
transformare canonică, 32
transformata Legendre, 30

unică continuare, 43

variabile conjugate, 29
varietate
  riemanniană, 15
  simplectică, 69

Bibliografie

[1] A. A. Agrachev, R. V. Gamkrelidze. Exponential representation of flows and a chronological enumeration. *Mat. Sb. (N.S.)*, 107(149)(4):467–532, 639, 1978.

[2] Andrei A. Agrachev, Yuri L. Sachkov. *Control theory from the geometric viewpoint*, volume 87 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Control Theory and Optimization, II.

[3] V. I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*, vol. 60, *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1978.

[4] V. Barbu. *Ecuaţii diferenţiale*. Editura Junimea, 1985.

[5] V. Barbu. *Mathematical methods in optimization of differential systems*, vol. 310, *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1994. Translated and revised from the 1989 Romanian original.

[6] V. Barbu, Th. Precupanu. *Convexitate şi optimizare în spaţii Banach*. Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucureşti, 1975.

[7] Viorel Barbu. *Metode matematice în optimizarea sistemelor diferenţiale*. Editura Academiei, Bucureşti, 1989.

[8] Viorel Barbu. *Analysis and control of nonlinear infinite-dimensional systems*, vol. 190, *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1993.

[9] Viorel Barbu, Cătălin Lefter. Optimal control of ordinary differential equations. Cañada, A.(ed.) et al., Ordinary differential equations. Vol. II. Amsterdam: Elsevier/North Holland. Handbook of Differential Equations, 1-75, 2005.

[10] R. Bellman. *Dynamic programming*. Princeton Univeristy Press, Princeton, N. J., 1957.

[11] G. A. Bliss. *Calculus of variations. 6th impression.* The Carus Mathematical Monographs. No.1. Washington: The Mathematical Association of America; La Salle, Ill.: The Open Court Publishing Company. XIII, 189 p. , 1971.

[12] F. H. Clarke. Generalized gradients and applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 205:247–262, 1975.

[13] F. H. Clarke. The maximum principle under minimal hypotheses. *SIAM J. Control Optimization*, 14(6):1078–1091, 1976.

[14] F. H. Clarke. *Optimization and nonsmooth analysis*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. John Wiley & Sons Inc., New York, 1983. A Wiley-Interscience Publication.

[15] F.H. Clarke, R.B. Vinter. The relationship between the maximum principle and dynamic programming. *SIAM J. Control Optim.*, 25(5):1291–1311, 1987.

[16] E. A. Coddington, N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1955.

[17] R. Courant, D. Hilbert. *Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations*. (Vol. II by R. Courant.). Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons), New York-Lon don, 1962.

[18] M. G. Crandall, L. C. Evans, P.-L. Lions. Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 282(2):487–502, 1984.

[19] M.G. Crandall, H. Ishii, P.-L. Lions. Uniqueness of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations revisited. *J. Math. Soc. Japan*, 39:581–596, 1987.

[20] M.G. Crandall, H. Ishii, P.-L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, 27(1):1–67, 1992.

[21] M.G. Crandall, P.-L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277(1):1–42, 1983.

[22] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov. *Modern geometry—methods and applications. Part I*, vol. 93, *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1992. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields.

[23] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov. *Modern geometry—methods and applications. Part II*, vol. 104, *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1985. The geometry and topology of manifolds.

[24] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov. *Modern geometry—methods and applications. Part III*, vol. 124, *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1990. Introduction to homology theory.

[25] W.H. Fleming, R.W. Rishel. *Deterministic and stochastic optimal control*. Springer-Verlag, Berlin, 1975. Applications of Mathematics, No. 1.

[26] R. Gamkrelidze. Exponential representation of solutions of ordinary differential equations. In *Equadiff IV, Proceedings, Prague 1977*, pages 118–129. Lecture Notes in Mathematics, vol. 703, Springer.

[27] I.M. Gelfand, S.V. Fomin. *Calculus of variations. Transl. from the Russian and edited by Richard A. Silverman. Reprint of the 1963 original.* Mineola, NY: Dover Publications. vii, 232 p. $ 9.95 , 2000.

[28] Leslie M. Hocking. *Optimal control*. Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1991. An introduction to the theory with applications.

[29] Alberto Isidori. *Nonlinear control systems*. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1995.

[30] V. Jurdjevic. *Geometric control theory*, volume 52 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[31] J.E. Marsden, T. S. Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry*, volume 17 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1999. A basic exposition of classical mechanical systems.

[32] L. Pontriaghin, V. Boltianski, R. Gamkrelidze, E. Michtchenko. *Théorie mathématique des processus optimaux*. Éditions Mir, Moscow, 1974.

[33] L. S. Pontryagin. *Ordinary differential equations*. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-Palo Alto, Calif.-London, 1962.

[34] R.T. Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton Mathematical Series, No. 28. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[35] I.I. Vrabie. *Ecuaţii diferenţiale*. Editura MATRIXROM, Bucureşti, 2000.

[36] I.I. Vrabie. *C_0-semigroups and applications*, vol. 191, *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2003.

[37] J. Zabczyk. *Mathematical control theory: an introduction*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.